وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY.
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA.



جامعة باجي مختار عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année : 2017

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN SCIENCES

EXISTENCE GLOBALE DE SOLUTIONS POUR CERTAINS SYSTÈMES DE RÉACTION DIFFUSION DE TYPE GIERER-MEINHARDT

Option : Analyse Fonctionnelle et Systèmes Dynamiques

Présentée par
LOUAFI Hichem

DIRECTEUR DE THESE:	BADRAOUI Salah	Prof. U. Guelma
CO-DIRECTEUR:	MAZOUZI Said	Prof. U. B.M. Annaba

Devant le jury

PRÉSIDENT	BOUSSETILA Nadjib	Prof.	U. Guelma
EXAMINATEUR	DJEBABLA Abdelhak	MCA	U. B.M. Annaba
EXAMINATEUR	NISSE Lamine	Prof.	U. El-Oued
EXAMINATEUR	LABIDI Soraya	MCA	U. B.M. Annaba

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu le tout Puissant de m'avoir donné le courage et éclairé le chemin pour mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse, Monsieur ***BADRAOUI Salah****, Professeur à l'Université de Guelma, pour avoir accepté de diriger mes travaux de recherches. Je le remercie pour la patience, la gentillesse et la disponibilité dont il a fait preuve. Qu'il trouve ici l'expression de ma très grande gratitude.*

Je tiens aussi à exprimer ma plus profonde gratitude à Monsieur ***MAZOUZI Said****, Professeur à l'Université de Annaba et co-directeur de thèse pour son soutien et sa patience. Ses critiques constructives, ses précieux conseils, ses relectures pointilleuses m'ont été d'une aide précieuse.*

Mes sincères remerciements vont particulièrement à Monsieur ***BOUSSETILA Nadjib*** *, professeur à l'Université de Guelma, d'avoir accepté de présider le jury.*

De même je remercie Monsieur ***DJEBABLA Abdelhak****, maître de conférences à l'Université de Annaba pour l'honneur qu'il m'a fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury, malgré ses innombrables occupations au niveau du département de Mathématiques.*

Je tiens à adresser ma profonde gratitude à Madame ***LABIDI Soraya****, maître de conférences à l'Université de Annaba d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

Un grand respect s'adresse à l'honorable membre de jury ; Monsieur ***NISSE Lamine****, professeur à l'Université de Oued-Souf.*

Résumé

L'objet général de notre travail est l'étude de l'existence globale –en temps- des solutions pour des systèmes de Réaction-Diffusion à réaction fractionnaire de type Gierer-Meinhardt.
Ce type de systèmes a une vaste application aux domaines de la Biologie et de la Biochimie.
Nous avons étudié l'existence globale des solutions pour un certain système R-D de type Gierer-Meinhardt composé de trois équations.
Par ailleurs, nous avons généralisé l'étude de l'explosion des solutions pour le système EDO associé au système de Gierer-Meinhardt à *m* équations. Ce modèle est composé d'un activateur et de (*m-1*) inhibiteurs.
Nos techniques sont basées sur la construction de fonctionnelles de Lyapunov, les semi-groupes, les formes quadratiques, etc.

Mots-clés: Systèmes de Réaction-Diffusion, systèmes de Gierer-Meinhardt , modèle activateur-inhibiteur, existence globale, explosion en temps fini, fonctionnelle de Lyapunov, semi- groupe.

Abstract

The general purpose of our work is to study the global existence -in time- of solutions for Reaction-Diffusion systems with fractional reaction of Gierer-Meinhardt type.
This type of systems has a wide applications in the fields of Biology and Biochemistry.
We studied the global existence of solutions for a system of Gierer-Meinhardt type of three equations.
Next, the study of blow up of solutions was generalized for the ODE associated with the Gierer-Meinhardt system correspond of m equations. This model is composed with one activator and ($m-1$) inhibitors.
Our techniques are based on the construction of Lyapunov functional, semi-groups, quadratic forms, etc.

Keywords: Reaction-Diffusion systems, Gierer-Meinhardt systems, Activator-Inhibitor model, Lyapunov functional, semigroup, global existence, blow up.

ملخص

الهدف العام من هذه الأطروحة هو دراسة الوجود الكلي-بالنسبة للزمن- لحلول بعض جمل رد الفعل و الانتشار ذات التفاعل الكسري من نوع ڤيرار-منهارد التي لها تطبيقات واسعة في مجالات البيولوجيا و البيوكيمياء.
لقد قمنا بدراسة الوجود الكلي لحلول جملة ڤيرار-منهارد ذات ثلاث معادلات.
من جهة أخرى، عمّمنا دراسة انفجار حلول جملة المعادلات التفاضلية العادية المرافقة لجملة ڤيرار-منهارد ذات m معادلة وهو نظام أصله أنموذج مكون من منشط و $(m-1)$ مثبط.
تعتمد التقنيات المستعملة في هذه الدراسة على إنشاء تابعية ليابونوف، أنصاف الزمر، الأشكال التربيعية، إلخ.

الكلمات المفتاحية: جمل التفاعل والانتشار، جملة ڤيرار-منهارد، أنموذج منشط-مثبط، تابعية ليابونوف، أنصاف الزمر، الوجود الكلي وانفجار الحلول.

Table des matières

0.1 Introduction Générale . . . 3

1 Notations et Notions Générales **5**

1.1 Notations générales . . . 5

1.1.1 Espaces fonctionnels . . . 6

1.2 Notions générales . . . 7

1.2.1 Formules de Green . . . 8

1.2.2 Seconde loi de Fick . . . 9

1.2.3 Formes Quadratiques . . . 10

1.2.4 Quelques inégalités utiles . . . 11

1.2.5 Semi-Groupes et Générateurs Infinitésimaux . . . 13

2 Introduction aux Systèmes de Réaction-Diffusion **16**

2.1 Introduction . . . 16

2.2 Modélisation . . . 17

2.3 Exemples . . . 18

2.3.1 En bioécologie . . . 18

2.3.2 En électronique . . . 19

2.4 Existence globale des solutions . . . 20

3 Systèmes de Réaction-Diffusion de type Gierer-Meinhardt **30**

3.1 Introduction . . . 30

3.2 Exemple de modélisation . . . 32

3.3 Etude de l'existence globale des solutions de système de Gierer-Meinhardt d'ordre deux 33
3.3.1 Principe de Maximum 34

4 Existence globale de solutions pour certains systèmes de R-D de type Gierer-Meinhardt 40
4.1 Existence globale et Explosion en temps fini de solutions à trois composantes de systèmes de R-D de type Gierer-Meinhardt 40
4.1.1 Etude de l'existence globale en temps des solutions 41
4.1.2 Explosion en temps fini des solutions pour le système EDO associé . 60
4.2 Existence globale des solutions d'un système de type Gierer-Meinhardt couplé 63
4.2.1 Etude de l'existence globale 65

5 Etude de l'explosion en temps fini des solutions d'un Système Général de Gierer-Meinhardt à m composantes 78

0.1 Introduction Générale

Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes d'équations différentielles couplés aux dérivées partielles de type parabolique. Aujourd'hui, ces systèmes reçoivent un grand traité d'attention, pour la richesse de la structure de leurs ensembles de solutions. De tels systèmes modélisent des phénomènes apparaissant dans des secteurs variés: chimie, biologie, neurophysiologie, épidémiologie, combustion, génétique des populations, etc. Les individus diffèrent d'un problème à un autre: en chimie, par exemple, ils représentent des substances chimiques; en biochimie, ils peuvent représenter des molécules; en métallurgie, des atomes; en dynamique des populations, ce sont des humains; en génétique des populations, ils représentent des caractères. En biophysique, ils représentent des charges électriques ou bien des différences de potentiel et en environnement, ce sont des animaux ou des plantes d'une forêt, d'une mer ou bien d'un fleuve.

L'étude du présent travail est l'existence globale et/ou l'explosion (blow up) en temps fini des solutions de *Systèmes de Réaction-Diffusion* de type *Gierer-Meinhardt* formés d'équations aux dérivées partielles de type parabolique avec une réaction fractionnaire. On utilise dans cette optique quelques méthodes fonctionnelles et algébriques telles que la construction des fonctionnelles de Lyapunov, les semi-groupes, les formes quadratiques, etc.

La thèse est structurée comme suit:

Chapitre.1: On rappelle les notations et les notions préliminaires nécessaires en vue de les utiliser dans les chapitres suivants. On insistera, en particulier, sur quelques théorèmes généraux d'analyse fonctionnelle, sur les espaces de Sobolev, les semi-groupes, quelques inégalités utiles et la positivité des formes quadratiques.

Chapitre 2: On donne des applications concrètes des systèmes de réaction-diffusion dans plusieurs domaines du monde réel.
Ainsi exposera des méthodes générales transformant les phénomènes naturelles à des *Systèmes de Réaction-Diffusion* de la forme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u)\right),$$

en utilisant la seconde loi de Fick.
Par ailleurs: On étudiera quelques exemples dans des domaines variés: En bioécologie, électronique et en génétique des populations.
Enfin, on donnera un exemple d'étude de l'existence globale en temps des solutions d'un système de réaction-diffusion avec une matrice de diffusion triangulaire.

Chapitre 3: Dans ce chapitre nous traiterons un système de *Gierer-Meinhardt* qui est un type célèbre parmi les systèmes de Réaction-Diffusion. On donnera ensuite une forme pratique de ce système modélisant un certain phénomène biologique. D'autre part, on présentera un exemple de modélisation pour la coloration des coquilles de mer. Finalement, on étudiera l'existence globale des solutions d'un système de Gierer-Meinhardt à deux équations.

Au Chapitre 4: Nous établirons l'existence globale des solutions d'un certain système de Réaction-Diffusion de type *Gierer-Meinhardt* composé de trois équations, appliqué à la biologie végétale; au développement des plantes dans un domaine appelé *phyllotaxie* (disposition des palmes sur le stipe de la plante). Pour cette raison on appliquera quelques lemmes auxiliaires d'estimation ainsi que des théorèmes qu'on prouvera à l'aide de la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov. Nous allons également discuter l'explosion -en temps fini- du système EDO correspondant.
D'autre part on étudiera l'existence globale des solutions d'un système couplé à quatre équations de type Gierer-Meinhardt modifié à l'aide de la modification de Conway-Cooper sur la troisième équation.

Finalement, dans le **Cinquième Chapitre,** on généralisera l'étude de l'explosion des solutions du système EDO associé au système de type *Gierer-Meinhardt* à m équations ou encore d'un modèle composé d'un activateur et de $(m-1)$ inhibiteurs.

Chapitre 1

Notations et Notions Générales

1.1 Notations générales

Ω étant un domaine borné non vide de $\mathbb{R}^N$, de frontière $\partial\Omega$.

$d\sigma$ désignera la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.

On définit le gradient d'une fonction $u\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ par:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}), \tag{1.1.1}$$

et son Laplacien par

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

$\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u extérieure à $\partial\Omega$, c'est-à-dire:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \overrightarrow{\eta},$$

où $\overrightarrow{\eta}$ désigne le vecteur unitaire de la normale extérieure à $\partial\Omega$.

$C(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions continues dans Ω.

$\mathbb{C}^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω, où k est un entier positif non nul et on a

$$\mathbb{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} \mathbb{C}^k(\Omega).$$

Un espace de **Banach** est un espace vectoriel normé complet i.e. toute suite de Cauchy est convergente.

$\mathfrak{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $\mathbb{C}^{\infty}$ à support compact contenu dans Ω.

$\mathfrak{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $\mathfrak{D}(\Omega)$.

1.1.1 Espaces fonctionnels

$\mathbb{L}^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions u mesurables sur Ω telles que $\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx < \infty, 1 \leq p < \infty$ muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u|^p \, dx. \tag{1.1.2}$$

$\mathbb{L}^{\infty}(\Omega)$ est l'espace des fonctions u mesurables telles que $|u| \leq M$, $p.p$ (presque partout) sur Ω, où M est une constante. $\mathbb{L}^{\infty}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{L}^{\infty}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess \, |u\,(x)| \, . \tag{1.1.3}$$

On a aussi, si $(\mathbb{X}, \|.\|_{\mathbb{X}})$ est un Banach;

$L^p(0,T,\mathbb{X}) = \left\{ u \text{ mesurable de } [0,T] \to \mathbb{X}, \ \int_0^T \|u\|^p_{\mathbb{X}} \, dt < \infty, \text{si } 1 \leq p < \infty \right\}$ muni de la norme:

$$\|u\|^p_{L^p(0,T,\mathbb{X})} = \int_0^T \|u\|^p_{\mathbb{X}} \, dt \tag{1.1.4}$$

$L^{\infty}(0,T,\mathbb{X}) = \left\{ u \text{ mesurable de } [0,T] \to \mathbb{X}, \ \sup_{t\in(0,T)} ess \, \|u\|_{\mathbb{X}} < \infty \right\}$ muni de la norme:

$$\|u\|_{L^{\infty}(0,T,\mathbb{X})} = \sup_{t\in(0,T)} ess \, \|u\|_{\mathbb{X}} \, . \tag{1.1.5}$$

$C^{0,\alpha}\,(\Omega) = \left\{ u \in C\,(\Omega)\,;\, \sup\limits_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty \right\}$ avec $0 < \alpha < 1$.

$C^{k,\alpha}\,(\Omega) = \left\{ u \in C^k\,(\Omega)\,;\, D^j u \in C^{0,\alpha}\,(\Omega) \qquad \forall j, \ |j| \leq k \right\}$.

On définit l'espace $\mathbb{H}^1(\Omega)$ par

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2\,dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx = \int_{\Omega} |u|^2\,dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx. \tag{1.1.6}$$

Généralement on a pour $m \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = \left\{u \in \mathbb{L}^2(\Omega),\ D^\alpha u \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ vérifiant } |\alpha| \leq m\right\}$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2\,dx \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2\ , \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

où $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ la dérivée au sens des distributions.
Définissons l'éspace $\mathbb{W}^{m.p}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ par

$$\mathbb{W}^{m.p}(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^p(\Omega),\ D^\alpha u \in \mathbb{L}^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{m.p}^p = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}^p,\ 1 \leq p < +\infty. \tag{1.1.8}$$

On rappellera que $\mathbb{H}^1(\Omega), \mathbb{H}^m(\Omega), \mathbb{W}^{m.p}(\Omega)$ sont appelés des espaces de Sobolev.

1.2 Notions générales

Déterminants principaux successifs d'une matrice

Soit la matrice carrée d'ordre n

$$(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.2.9}$$

Ses **déterminants principaux successifs** sont notés par $\det 1$, $\det 2, ...,$ $\det n$, et écrits sous la forme:

$$\det 1 = a_{11}, \det 2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \det n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.2.10}$$

1.2.1 Formules de Green

Nous rappelons maintenant quelques formules de Green qui généralisent au cas multi-dimensionnel la formule d'intégration par parties en dimension une. Elles sénoncent de la manière suivante:

Théorème 1.2.1 *On suppose que Ω est un domaine ouvert de frontière $\partial\Omega$ continue par morceaux.*
Alors, si u et v sont des fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta_i d\sigma \ , \ 1 \leq i \leq n, \tag{1.2.11}$$

on désigne par η_i le $i^{\text{ème}}$ cosinus directeur de la normale η à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω et on écrit $\eta_i = (\overrightarrow{\eta}.\overrightarrow{e_i})$, $d\sigma$ la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.

Preuve. Si u (resp. v) appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega)$, il existe une suite (u_m) (resp. (v_p)) de $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ qui converge vers u dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ (resp. vers v dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$) [$\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ dense dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$].
On a pour les fonctions u_m et v_p de $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_p dx = -\int_{\Omega} u_m \frac{\partial v_p}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u_m v_p \eta_i d\sigma, \ 1 \leq i \leq n, \tag{1.2.12}$$

on obtient l'expression (1.2.11) par passage à la limite dans la formule précédente. ■

Corollaire 1.2.1 *Pour toute fonction u de $\mathbb{H}^2(\Omega)$ et toute fonction v de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on a la formule de Green*

$$\int_{\Omega} (\Delta u)\, v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v. \tag{1.2.13}$$

Preuve. Donnons une conséquence de Théorème (1.2.1).
On pose $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, le Laplacien d'une distribution u. Alors, si u est une fonction de $\mathbb{H}^2(\Omega)$, on a d'après (1.2.11) pour toute fonction v de $\mathbb{H}^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} (\Delta u)\, v &= -\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \eta_i d\sigma \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.2.1 *La formule (1.2.11) reste valable si $u, v \in C^1$et la formule (1.2.13) reste valable si $u \in C^2, v \in C^1$.*

Remarque 1.2.2 *les formules de Green sont des généralisations de la formule d'intégration par parties de la dimension une à la dimension n.*

1.2.2 Seconde loi de Fick

Considérons le flux de particules d'une certaine espèce, les particules peuvent être des molécules, des atomes, des défauts ponctuels, des électrons libres ou des trous électroniques, etc. Soit $C(x,t)$ leur concentration, exprimée en nombre de particules ou d'atomes par unité de volume.

On définit le flux de diffusion F comme la quantité de matière (particules) par seconde qui traverse l'unité d'aire d'une surface normale au mouvement de transfert étudié. F est aussi appelé la densité de courant de particules. En présence d'un gradient de concentration, on admet qu'il s'établit un flux de particules(un écoulement de particules) dans le sens descendant le gradient, et que ce flux est proportionnel au gradient correspondant:

$$F = -D\frac{\partial C}{\partial x} = -D \,\mathrm{grad}\, C, \qquad (1.2.14)$$

où D est appelé coefficient de diffusion ou diffusivité.

Le signe négatif indique que le flux diffuse de la région ayant une forte concentration de particules à la moins forte.

La seconde équation de Fick exprime qu'en tout point x la variation temporelle de la concentration $C(x,t)$ en fonction de sa variation spatiale au voisinage de ce point par la relation:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \tag{1.2.15}$$

cette équation décrit comment le changement dans la concentration dans un élément de volume est déterminé par le changement (variation) dans le flux entrant et le flux sortant du volume.

En combinant les équations (1.2.14) et (1.2.15), on obtient:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial C}{\partial x}.$$

Si D est indépendant de la concentration, on obtient:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Remarque 1.2.3 *L'équation (1.2.14) est connue sous le nom de "**Première Loi de Fick**".*

Remarque 1.2.4 *La première équation de Fick (1.2.14) est utilisée en régime permanent seulement, c'est à dire lorsque le flux de particules ne dépend pas du temps. La deuxième loi de Fick exprime non plus un régime permanent de diffusion, mais un régime transitoire.*

1.2.3 Formes Quadratiques

Soi la *matrice réelle symétrique* $D = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Définition 1.2.1 *Le polynôme homogène du second degré relativement à n variables $u_1, u_2, ..., u_n$*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j. \tag{1.2.16}$$

est appelé forme quadratique.

Désignons la matrice-colonne $(u_1, u_2, ..., u_n)$ par u et la forme quadratique par

$$A(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j, \tag{1.2.17}$$

qu'on peut écrire

$$A(u,u) = u^T Du. \tag{1.2.18}$$

Théorème 1.2.2 *Une forme quadratique est dite définie positive, i.e.*

$$\mathrm{A}(u,u) > 0,\ \ u \neq 0,$$

si, et seulement si, tous les déterminants principaux successifs de sa matrice des coefficients, sont positifs, i.e.

$$\det 1 > 0, \det 2 > 0, ..., \det n > 0. \tag{1.2.19}$$

Preuve. Voir Gantmacher [13] page (308). ■

1.2.4 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Cauchy

Soit a, $b \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, alors

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2$$

Preuve. L'inégalité de Cauchy est un cas particulier de l'inégalité de Young suivante: ■

Inégalité de Young

Soit f une fonction continue et croissante sur $[0, c]$, où $c > 0$.

$f(0) = 0$, $a \in [0, c]$ et $b \in [0, f(c)]$, alors

$$ab \leq \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(x)\, dx \tag{1.2.20}$$

où f^{-1} est la fonction inverse de f.

Preuve. On commence par l'expression

$$g(a) = ab - \int_0^a f(x)\,dx. \qquad (1.2.21)$$

On prend $b > 0$ comme un paramètre. Puisque $g'(a) = b - f(a)$ et la fonction f est croissante, on a

$$\begin{aligned} g'(a) &> 0 \quad \text{pour } 0 < a < f^{-1}(b), \\ g'(a) &= 0 \quad \text{pour } a = f^{-1}(b), \\ g'(a) &< 0 \quad \text{pour } a > f^{-1}(b). \end{aligned}$$

De cela, $g(a)$ est une valeur maximale de la fonction g atteinte en $a = f^{-1}(b)$.

Ainsi

$$g(a) \le \max g(x) = g\left(f^{-1}(b)\right). \qquad (1.2.22)$$

Par intégration par parties on aura

$$\begin{aligned} g\left(f^{-1}(b)\right) &= bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\,dx \\ &= \int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Si on prend $y = f(x)$, l'égalité ci-dessus devient:

$$g\left(f^{-1}(b)\right) = \int_0^b f^{-1}(y)\,dy. \qquad (1.2.23)$$

En comparant (1.2.21), (1.2.23), et (1.2.22), on obtient (1.2.20)

(Voir Mitrinovic, Pecaric et Fink [38]). ■

La fonction $f(x) = x^{p-1}$ avec $p > 1$ dans chaque intervalle $[0, c]$ satisfait les conditions précédentes. On applique (1.2.20) utilisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on obtient

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad (1.2.24)$$

Si on remplace la fonction $f(x)$ par ϵx^{p-1} dans (1.2.20) où $\epsilon > 0$, alors on obtient l'inégalité de Young en ϵ:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab \le \epsilon a^p + \frac{(\epsilon p)^{\frac{-q}{p}}}{q} b^q. \qquad (1.2.25)$$

Ce qui donne

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab \le \epsilon a^p + (\epsilon)^{\frac{-1}{p-1}} b^q.$$

Inégalité de Hölder

Soit $p > 1$ et $q > 1$ des nombres réels liés par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$\begin{aligned} \forall (f, g) &\in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) : \\ \int_\Omega |f(x) g(x)| \, dx &\leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \qquad (1.2.26)$$

1.2.5 Semi-Groupes et Générateurs Infinitésimaux

Soit $T(t)$ une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans l'espace d'opérateurs linéaires bornés qui appliquent l'espace de Banach $(E, \|.\|)$ dans lui-même, $T(t) : E \to E$.

Définition 1.2.2 *On dit que $T(t)$ est un semi-groupe fortement continu ou de classe C_0 si:*

i) $T(0) = I$.

ii) $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$, pour tout $t, s \geq 0$,

iii) $T(t)u$ est continue comme fonction de t, pour chaque u fixée i.e.

$$\lim_{t \to t_0} T(t)u = T(t_0)u, \text{ pour tout } t_0 \geq 0 \text{ et tout } u \in E \text{ (fixée)}.$$

Théorème 1.2.3 *Soit $T(t)$ un semi-groupe fortement continu, alors il existe des constantes réelles ω et $C(\omega)$ telles que*

$$\|T(t)\| \leq C(\omega) \exp \omega t, \text{ pour tout } t \geq 0$$

Remarque 1.2.5 *Dans le cas $C(\omega) = 1$, $\omega = 0$, le semi-groupe $T(t)$ est dit de contractions.*

Définition 1.2.3 *Considérons dans E le sous-espace vectoriel*

$$D(A) = \left\{ u \in E \ / \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(T(\Delta t) - I \right) u \quad \text{existe dans } E \right\},$$

et pour tout $u \in D(A)$, définissons l'opérateur A par

$$Au = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(T(\Delta t) - I \right) u.$$

Cet opérateur de domaine de définition $D(A)$ est appelé générateur infinitésimal du semi-groupe $T(t)$.

Théorème 1.2.4 *Si le semi-groupe $T(t)$ est de classe C_0, alors*

$$D(A) \text{ est dense dans } E.$$

Preuve. Voir Pazy [41] page 5. ■

Proposition 1.2.1 *Soit $T(t)$ un semi-groupe fortement continu sur E de générateur infinitésimal A, alors on a*

i) Pour $u \in D(A)$; $T(t)u \in D(A)$ et on a

$$\frac{dT(t)}{dt}u = AT(t)u = T(t)Au, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

ii) Pour $u \in E$

$$\int_0^t T(s)uds \in D(A) \text{ et } A\left(\int_0^t T(s)uds\right) = T(t)u - u.$$

Preuve. Voir Pazy [41]. ■

Définition 1.2.4 *Soit $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : \xi_1 < \arg z < \xi_2,\ \xi_1 < 0 < \xi_2,\}$ et pour tout $z \in \Lambda$ soit $T(z)$ un opérateur linéaire dans un espace de Banach E. La famille $T(z)$, $z \in \Lambda$ est un semi-groupe analytique (holomorphe) sur Λ si*

i) $z \longmapsto T(z)$ est une application analytique sur Λ.

ii) $T(0) = I$ et $\lim\limits_{z\in\Lambda, z\longrightarrow 0} T(z)u = u$ pour tout $u \in E$.

iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ pour $z_1, z_2 \in \Lambda$.

Un semi-groupe est appelé analytique s'il est analytique sur un certain secteur $\Lambda \subset \mathbb{C}$ contenant le demi-axe réel positif.

Il est clair que la restriction d'un semi-groupe analytique à l'axe réel est un semi-groupe continu.

Considérons le problème d'évolution non homogène à valeur initiale

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), & t > 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.2.27}$$

défini dans un espace de Banach E où $f : [0, \tau) \longrightarrow E$ et A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $T(t)$ sur E.

Proposition 1.2.2 *Si* $f \in L^1(0, \tau; E)$, *alors pour tout* $u_0 \in E$, *le problème (1.2.27) admet une seule solution donnée par*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \ 0 \leq t \leq \tau$$

Preuve. Voir Pazy [41] page 106. ■

Chapitre 2

Introduction aux Systèmes de Réaction-Diffusion

2.1 Introduction

Les problèmes de Réaction-Diffusion s'écrivent sous une forme générale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u), \qquad (2.1.1)$$

où l'inconnue: $u(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_m(x,t))$ est un vecteur de variables,
la réaction: $f(x,t,u(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t)), ..., f_m(x,t,u(x,t))$ est généralement non linéaire, D est une matrice carrée $m \times m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion. Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de u, par exemple, en chimie u est un vecteur de concentrations chimiques, et f représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations. Le terme $D\Delta u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de la réaction.

Les conditions aux bords seront choisies selon l'origine et la nature du problème étudié: s'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière du domaine Ω sur lequel le problème est posé, on choisit les conditions aux bords homogènes de Neumann. S'il n'y a pas d'individus sur la frontière, on prend les conditions aux bords homogènes de Dirichlet. L'inconnue (la solution qu'on cherche) est un vecteur dont les composantes sont généralement des fonctions positives: en chimie, par exemple,

c'est un vecteur de concentrations chimiques; en biochimie ou en métallurgie, c'est un vecteur de concentrations en nombres de molécules ou d'atomes respectivement; en dynamique des populations et en environnement, c'est un vecteur de densités de populations humaines, animales ou végétales...

Les conditions initiales sont généralement positives; puisqu'il s'agit de concentrations, densités, charges électriques ...

2.2 Modélisation

Pour simplifier et exposer l'origine des équations de Réaction-Diffusion proposons nous à titre d'exemple l'étude d'une population avec densité $u(x,t)$, vivant et déplaçant dans un conteneur. Pour décrire le mouvement, nous introduisons une autre quantité de charge; le flux de particules $J(x,t) \in \mathbb{R}^n$. A chaque emplacement x et à chaque instant t, le flux $J(x,t)$ est un vecteur qui pointe dans la direction générale de circulation à cet endroit. Sa grandeur $|J(x,t)|$, est proportionnelle à la quantité de particules qui circulent dans cette direction par unité de temps. Plus précisément, le flux J joue le même rôle que le flux de la chaleur, ou le flux de concentration pour un réacteur chimique. Considérons un volume d'essai Ω de frontière Γ et nous équilibrons les flux entrants et sortants sur Ω à travers Γ. Plus simplement:

Changement de u dans $\Omega =$ flux à travers $\Gamma +$ Changement relié à la naissance et la mort.

Donc on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(x,t)dV = -\int_{\Gamma} J(x,t)dS + \int_{\Omega} f\left(u(x,t)\right)dV,$$

où $f\left(u(x,t)\right)$ décrit le changement relié à la naissance et la mort, dV désigne l'intégration sur l'espace $\mathbb{R}^n$ et dS représente l'intégration sur la surface $\mathbb{R}^{n-1}$.

Utilisant le théorème de divergence on aura

$$\int_{\Gamma} J(x,t)dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} J(x,t)dV,$$

d'où

$$\int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt}u - f\left(u\right) + \operatorname{div} J\right) dV = 0.$$

Cette dernière équation est satisfaite dans chaque volume de test Ω. Ainsi (si la mesure dV n'est pas dégénéré) il en résulte que

$$\frac{d}{dt}u - f(u) + \operatorname{div} J = 0. \tag{2.2.2}$$

Ensuite, on a besoin d'une expression du flux en termes de distribution de population comme dans les réactions chimiques, ça nous conduit à utiliser la seconde loi de Fick

$$J = -D\nabla u.$$

On suppose que le flux J est proportionnel au gradient négatif de la distribution de particules. Si nous combinons la loi d'équilibre (2.2.2) avec la seconde loi de Fick, nous obtenons l'équation de réaction-diffusion,

$$\frac{d}{dt}u = D\Delta u + f(u). \tag{2.2.3}$$

Remarque 2.2.1 *Dans le cas où $f(u) = 0$, l'équation (2.2.3) devient l'équation de la chaleur.*

2.3 Exemples

2.3.1 En bioécologie

Le modèle décrivant la prédation des proies de densité spatiale u par des prédateurs de densité spatiale v est décrit par le *système de réaction-diffusion*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu\dfrac{\partial u}{\partial x} + u(p - qv) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu\dfrac{\partial u}{\partial x} + v(r - su) = 0 \end{cases}, \qquad \text{dans } (0,\infty)\times\mathbb{R},$$

avec des conditions initiales vérifiant :

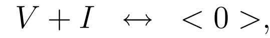
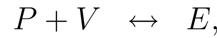
$$\begin{cases} 0 \le \delta \le u_0(x) \le \alpha \\ 0 \le \gamma \le v_0(x) \le \beta \end{cases} \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R},$$

où a, $b > 0$; p, r, q, s, ν, μ, δ, α et β désignent des constantes positives et $u_0(x) \equiv u(0,x)$, $v_0(x) \equiv v(0,x)$ sont des fonctions données. Les inconnues sont $u = u(x,t)$ et $v = v(x,t)$.

Physiquement, les constantes p et q sont les cœfficients décrivant la croissance de la densité du prédateur, tandis que le cœfficient s décrit la décroissance de la densité de la proie due à la présence du prédateur.

2.3.2 En électronique

Prenons comme exemple la diffusion du phosphore dans le silicone. On dope une plaque de silicium par le phosphore (en la chauffant par exemple); le phénomène est décrit par les trois réactions:


$$\begin{aligned} V + I &\leftrightarrow < 0 >, \\ P + V &\leftrightarrow E, \\ P + I &\leftrightarrow F. \end{aligned}$$

La première réaction décrit la neutralisation d'une lacune V (un lieu où se trouve un atome de silicium) par l'occupation de son lieu par un atome de Silicium interstitiel I (c'est un atome de Silicium qui ne se trouve pas dans sa place habituelle). Dans la deuxième, un atome de Phosphore substitutionnel P prenant la place d'une lacune V, crée un complexe de type E, tandis que dans la troisième réaction, un atome de Phosphore substitutionnel P prenant la place d'un atome de Silicium interstitiel I crée un complexe de type F. Les trois réactions sons réversibles.

Si on note par $[V]$, $[E]$, $[I]$, $[F]$ et $[P]$ les concentrations en nombre de lacunes V, nombre de complexes du type E, nombre d'atomes de Silicium interstitiel I, nombre de complexes de type F et nombre d'atomes de Phosphore substitutionnel P, en appliquant la loi de conservation de la masse et en tenant compte de la diffusion de chaque type (par application de la loi de Fick $J = -D\nabla c$, puis la loi de continuité $\nabla J = -\partial c/\partial t$)

on aboutit au système de Réaction -Diffusion suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}[V] = d_1\Delta[V] - k_1[P][V] + k_2[E] - k_0([V][I] - [V_{eq}][I_{eq}]) \\ \frac{\partial}{\partial t}[E] = d_1\Delta[E] + k_2[P][V] - k_2[E] \\ \frac{\partial}{\partial t}[I] = d_3\Delta[I] - k_3[P][I] + k_4[F] - k_0([V][I] - [V_{eq}][I_{eq}]) \\ \frac{\partial}{\partial t}[F] = d_4\Delta[F] + k_4[P][I] - k_4[F] \\ \frac{\partial}{\partial t}[P] = d_5\Delta[P] - k_5[P][V] + k_2[E] - k_3[P][I] + k_4[F] \end{cases}, \quad x \in \Omega,\ t > 0,$$

avec conditions aux bords bien choisies et conditions initiales positives. Voir Kouachi [26].

2.4 Existence globale des solutions

Considérons comme exemple, le système de Réaction-Diffusion avec une matrice de diffusion triangulaire:

$$u_t = a\Delta u - f(x,t,u,v), \qquad x \in \Omega, t > 0, \tag{2.4.4}$$

$$v_t = c\Delta u + d\Delta v - \rho f(x,t,u,v), \qquad x \in \Omega, t > 0 \tag{2.4.5}$$

supplémenté par les conditions aux limites et initiales suivantes:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, t > 0 \tag{2.4.6}$$

$$u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), \qquad x \in \Omega \tag{2.4.7}$$

où Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. Supposons que:

(H1) Les constantes réelles $a,\ d,\ c$ et ρ sont données par

$$a > 0,\ d > 0,\ \rho > 0 \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

(H2) $u_0,\ v_0 \in C(\overline{\Omega})$ sont des fonctions non négatives.

(H3) $f:\ \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue mesurable localement lipshitzienne en u, v.

(H4) $f(x,t,0,\eta) = 0$ pour tout $x \in \Omega,\ t > 0,\ \eta \in \mathbb{R}$.

(H5) $f(x,t,\xi,\eta) \geq 0$ pour tout $x \in \Omega,\ t > 0, \xi \geq 0,\ \eta \in \mathbb{R}$.

(H6) il existe une fonction localement lipshitzienne φ dans $\mathbb{R}$ et deux constantes réelles $k > 0,\ \sigma > 0$ telles que

$$0 \leq f(x,t,\xi,\eta) \leq k\varphi(\xi)\, e^{\sigma\eta} \text{ pour tout } x \in \Omega,\ t > 0,\ \xi \geq 0,\ \eta \geq 0$$

Le système (2.4.4)-(2.4.7) a été étudié extensivement dans les années récentes pour des cas variés, voir [2] [37] [17] [25] [23] [24] [3] [5].
Dans ce qui suit, on donne une réponse complète pour l'existence globale -en temps- des solutions de cette classe de systèmes et par une preuve unifiée, où nous utilisons la théorie des semi-groupes et la fonctionnelle de Lyapunov.

Théorème 2.4.1 *Si $a \neq d,\ c \geq \rho(a-d)$ et $v_0 - \frac{c}{a-d}u_0 \geq 0$; alors sous les hypothèses (H1)-(H6), il existe une solution locale unique nonnégative (u,v) pour le système (2.4.4)-(2.4.7).*

Preuve. Pour $1 < p < \infty$, les opérateurs A_p et B_p définis par

$$\begin{aligned} D(A_p) &= D(B_p) = \left\{u \in W^{2,p}(\Omega);\frac{\partial u}{\partial \nu}|\partial\Omega = 0\right\} \\ A_p u &= a\Delta u \text{ pour } u \in D(A_p),\ B_p u = d\Delta u \text{ pour } u \in D(B_p) \end{aligned}$$

génèrent deux semi-groupes analytiques sur l'espace $L^p(\Omega)$ notés $S_a(t)$ et $S_d(t)$ respectivement. Par ailleurs, la restriction de $-A_p$ et $-B_p$ sur $C(\overline{\Omega})$ est m-accretive.
Soit E_p l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} D(E_p) &= \left\{u \in W^{2,p}(\Omega);\frac{\partial u}{\partial \nu}|\partial\Omega = 0\right\}, \\ E_p u &= c\Delta u \text{ pour } u \in D(E_p), \end{aligned}$$

alors, l'opérateur matrice $M_p = \begin{pmatrix} A_p & 0 \\ E_p & B_p \end{pmatrix}$ de domaine

$$D_\infty(M_p) = \left\{u \in W^{2,p}(\Omega) \text{ pour tout } p > n,\ \Delta u \in C(\overline{\Omega});\frac{\partial u}{\partial \nu}|\partial\Omega = 0\right\}^2$$

génère un semi-groupe analytique $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés dans l'espace $C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ (cf. [25] [41] et autres).
Comme l'application,

$$F(u(t),v(t)) = (-f(.,t,u(t),v(t)),-\rho f(.,t,u(t),v(t)))$$

est continue mesurable localement Lipschitzienne en u, v dans l'espace $C\left(\overline{\Omega}\right) \times C\left(\overline{\Omega}\right)$, alors le problème (2.4.4)-(2.4.7) admet une solution classique locale unique dans l'intervalle $(0, T)$. Par ailleurs, il est bien connu que l'implication suivante est vraie

$$\left(\forall t \in (0, T_{\max}), \ \|u(t)\|_{\infty} + \|v(t)\|_{\infty} \leq Const.\right) \Longrightarrow T_{\max} = +\infty,$$

où $T_{\max}$ est le temps maximal d'existence

Par le principe de maximum (cf.[44]), il est clair que d'après la condition (H3) on a

$$0 \leq u \leq \|u_0\|_{\infty} \text{ pour tout } x \in \Omega, \ t > 0 \tag{2.4.8}$$

• Si $c = 0$, et comme $u \geq 0$, alors $f(x, t, u, v) \geq 0$ d'après (H5) et par (H6) et le théorème de comparaison (cf. [44]), on obtient $v \geq 0$.

• Si $c > \rho(a - d)$ et $v_0 - \frac{c}{a-d} u_0 \geq 0$, en posant $w = v - \frac{c}{a-d} u$, alors d'après (2.4.4)-(2.4.7), on aura

$$\begin{aligned} w_t &= d\Delta w + \left(-\rho + \frac{c}{a-d}\right) f(x, t, u, v) \text{ sur } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ w_0 &= v_0 - \frac{c}{a-d} u_0. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Par le théorème de comparaison (cf. [44]), on obtient que $w \geq 0$, et par conséquent

$$v \geq \frac{c}{a-d} u \geq 0$$

■

Théorème 2.4.2 *Sous les hypothèses du théorème 2.4.1, la solution du système (2.4.4)-(2.4.7) existe globalement.*

Pour démontrer ce théorème, commençons par le lemme suivant,

Lemme 2.4.1 *Supposons $a \neq d$. Soit (u, v) la solution du système (2.4.4)-(2.4.7) donnée par le Théorème 2.4.1; alors, pour toute constante $\gamma > 0$, il existe une constante $\beta = \beta(\gamma) > 0$ telle que la fonctionnelle*

$$t \longmapsto L(u(t), v(t)) = \int_\Omega e^{(u+\beta)^2+\gamma v} dx$$

est noncroissante sur $(0, T_{\max})$.

Noter que L est une fonctionnelle de Lyapuvov.

Preuve. Notons $w = (u+\beta)^2 + \gamma v$. Les équations (2.4.4)-(2.4.5) donnent pour tout $t \in (0, T_{\max})$

$$\begin{aligned} L'(t) &= \int_\Omega \left(2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(u+\beta) + \gamma\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right) e^{(u+\beta)^2+\gamma v} dx \\ &= \int_\Omega (2(u+\beta)(a\Delta u - f) + \gamma(c\Delta u + d\Delta v - \rho f)) e^{(u+\beta)^2+\gamma v} dx \\ &= 2a \int_\Omega (u+\beta) \Delta u e^w dx - 2\int_\Omega (u+\beta) f e^w dx + \gamma c \int_\Omega \Delta u e^w dx \\ &\quad + \gamma d \int_\Omega \Delta v e^w dx - \gamma\rho \int_\Omega f e^w dx \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} L'(t) &= 2a \int_\Omega (u+\beta) \Delta u e^w dx + \gamma c \int_\Omega \Delta u e^w dx \\ &\quad + \gamma d \int_\Omega \Delta v e^w dx + \int_\Omega [-\gamma\rho - 2(u+\beta)] f e^w dx \qquad (2.4.10) \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Utilisant la formule de Green, on aura

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv 2a \int_\Omega (u+\beta) \Delta u e^w dx = -2a \int_\Omega \nabla u \nabla [(u+\beta) e^w] dx \\ &= -2a \int_\Omega \nabla u \left[(\nabla u) e^w + \left(\nabla e^{(u+\beta)^2+\gamma v}\right)(u+\beta)\right] dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2a\int_\Omega \nabla u\left\{(\nabla u)+(u+\beta)\left[2(u+\beta)(\nabla u)+\gamma\nabla v\right]\right\}e^w dx\\
&= -2a\sum_{j=1}^n\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_j}+(u+\beta)\left[2(u+\beta)\frac{\partial u}{\partial x_j}+\gamma\frac{\partial v}{\partial x_j}\right]\right\}e^w dx\\
&= -2a\int_\Omega\left\{|\nabla u|^2+(u+\beta)\left[2(u+\beta)|\nabla u|^2+\gamma\nabla u\nabla v\right]\right\}e^w dx\\
&= -2a\int_\Omega |\nabla u|^2 e^w dx-4a\int_\Omega (u+\beta)^2|\nabla u|^2 e^w dx\\
&\quad -2a\gamma\int_\Omega (u+\beta)(\nabla u)(\nabla v)e^w dx \qquad (2.4.11)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_2 &\equiv \gamma c\int_\Omega \Delta u e^w dx=-\gamma c\int_\Omega(\nabla u)\nabla e^w dx=-\gamma c\int_\Omega(\nabla u)\nabla e^{(u+\beta)^2+\gamma v}dx\\
&= -\gamma c\int_\Omega(\nabla u)\left[2(u+\beta)(\nabla u)+\gamma\nabla v\right]e^w dx\\
&= -\gamma c\sum_{j=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_j}\left[2(u+\beta)\frac{\partial u}{\partial x_j}+\gamma\frac{\partial v}{\partial x_j}\right]e^w dx\\
&= -2\gamma c\int_\Omega(u+\beta)|\nabla u|^2 e^w dx-\gamma^2 c\int_\Omega(\nabla u)(\nabla v)e^w dx \qquad (2.4.12)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_3 &\equiv \gamma d\int_\Omega \Delta v e^w dx=-\gamma d\int_\Omega(\nabla v)\nabla e^w dx=-\gamma d\int_\Omega(\nabla v)\nabla e^{(u+\beta)^2+\gamma v}dx\\
&= -\gamma d\int_\Omega(\nabla v)\nabla\left((u+\beta)^2+\gamma v\right)e^{(u+\beta)^2+\gamma v}dx\\
&= -\gamma d\sum_{j=1}^n\int_\Omega\frac{\partial v}{\partial x_j}\left[2(u+\beta)\frac{\partial u}{\partial x_j}+\gamma\frac{\partial v}{\partial x_j}\right]e^w dx\\
&= -2\gamma d\int_\Omega(u+\beta)(\nabla u)(\nabla v)e^w dx-\gamma^2 d\int_\Omega|\nabla v|^2 e^w dx. \qquad (2.4.13)
\end{aligned}
$$

Comme $\beta\le u+\beta\le\|u_0\|+\beta$, alors par l'inégalité de Young-ϵ $\left(|ab|\le\frac{1}{4\epsilon}a^2+\epsilon b^2\right)$, on obtient

$$
I_1=-2a\int_\Omega|\nabla u|^2 e^w dx-4a\int_\Omega(u+\beta)^2|\nabla u|^2 e^w dx-2a\gamma\int_\Omega(u+\beta)(\nabla u)(\nabla v)e^w dx
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq -2a\int_{\Omega}|\nabla u|^2 e^w dx-4a\int_{\Omega}\beta^2|\nabla u|^2 e^w dx+2a\gamma\int_{\Omega}(u+\beta)\,|(\nabla u)(\nabla v)|\,e^w dx\\
&\leq -2a\int_{\Omega}|\nabla u|^2 e^w dx-4a\int_{\Omega}\beta^2|\nabla u|^2 e^w dx+2a\gamma\,(\|u_0\|+\beta)\int_{\Omega}|(\nabla u)(\nabla v)|\,e^w dx\\
&\leq -2a\int_{\Omega}|\nabla u|^2 e^w dx-4a\int_{\Omega}\beta^2|\nabla u|^2 e^w dx+2a\gamma\,(\|u_0\|+\beta)\int_{\Omega}\left(\frac{1}{4\epsilon}|(\nabla u)|^2+\epsilon\,|(\nabla v)|^2\right)e^w dx.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
I_1\leq\left[\begin{array}{c}-2a-4a\beta^2\\ +2a\gamma\,(\|u_0\|+\beta)\,\frac{1}{4\epsilon}\end{array}\right]\int_{\Omega}|\nabla u|^2 e^w dx+2a\gamma\,(\|u_0\|+\beta)\,\epsilon\int_{\Omega}|(\nabla v)|^2 e^w dx \quad (2.4.14)
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_2&=-2\gamma c\int_{\Omega}(u+\beta)\,|\nabla u|^2 e^w dx-\gamma^2 c\int_{\Omega}(\nabla u)(\nabla v)\,e^w dx\\
&\leq 2\gamma\,|c|\int_{\Omega}(u+\beta)\,|\nabla u|^2 e^w dx+\gamma^2\,|c|\int_{\Omega}|(\nabla u)(\nabla v)|\,e^w dx\\
&\leq 2\gamma\,|c|\int_{\Omega}(\|u_0\|+\beta)\,|\nabla u|^2 e^w dx+\gamma^2\,|c|\int_{\Omega}\left(\frac{1}{4\epsilon}|(\nabla u)|^2+\epsilon\,|(\nabla v)|^2\right)e^w dx.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
I_2\leq\left(2\gamma\,|c|\,(\|u_0\|+\beta)+\gamma^2\,|c|\,\frac{1}{4\epsilon}\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2 e^w dx+\gamma^2\,|c|\,\epsilon\int_{\Omega}|(\nabla v)|^2 e^w dx \quad (2.4.15)
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_3&=-2\gamma d\int_{\Omega}(u+\beta)\,(\nabla u)(\nabla v)\,e^w dx-\gamma^2 d\int_{\Omega}|\nabla v|^2 e^w dx\\
&\leq 2\gamma d\int_{\Omega}(u+\beta)\,|(\nabla u)(\nabla v)|\,e^w dx-\gamma^2 d\int_{\Omega}|\nabla v|^2 e^w dx\\
&\leq 2\gamma d\int_{\Omega}(\|u_0\|+\beta)\left(\frac{1}{4\epsilon}|(\nabla u)|^2+\epsilon\,|(\nabla v)|^2\right)e^w dx-\gamma^2 d\int_{\Omega}|\nabla v|^2 e^w dx
\end{aligned}
$$

alors

$$
I_3\leq 2\gamma d\,(\|u_0\|+\beta)\,\frac{1}{4\epsilon}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 e^w dx+\left[2\gamma d\,(\|u_0\|+\beta)\,\epsilon-\gamma^2 d\right]\int_{\Omega}|\nabla v|^2 e^w dx. \quad (2.4.16)
$$

Il est clair que $I_4=\int_{\Omega}\left[-\gamma\rho-2\,(u+\beta)\right]fe^w dx$ est négative.

Donc de (2.4.14)-(2.4.16) et (2.4.10) on trouve

$$
\begin{aligned}
L'(t)\leq\;&\left[-2a-4a\beta^2+2a\gamma\,(\|u_0\|+\beta)\,\frac{1}{4\epsilon}\right]\int_{\Omega}|\nabla u|^2 e^w dx+2a\gamma\,(\|u_0\|+\beta)\,\epsilon\int_{\Omega}|(\nabla v)|^2 e^w dx\\
&+\left[2\gamma\,|c|\,(\|u_0\|+\beta)+\gamma^2\,|c|\,\frac{1}{4\epsilon}\right]\int_{\Omega}|\nabla u|^2 e^w dx+\gamma^2\,|c|\,\epsilon\int_{\Omega}|(\nabla v)|^2 e^w dx\\
&+2\gamma d\,(\|u_0\|+\beta)\,\frac{1}{4\epsilon}\int_{\Omega}|\nabla u|^2 e^w dx+\left[2\gamma d\,(\|u_0\|+\beta)\,\epsilon-\gamma^2 d\right]\int_{\Omega}|\nabla v|^2 e^w dx
\end{aligned}
$$

ou encore

$$L'(t) \leq A \int_\Omega |\nabla u|^2 e^w dx + B \int_\Omega |(\nabla v)|^2 e^w dx \qquad (2.4.17)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \left[-2a - 4a\beta^2 + 2a\gamma (\|u_0\| + \beta) \frac{1}{4\epsilon}\right] + \left[2\gamma |c| (\|u_0\| + \beta) + \gamma^2 |c| \frac{1}{4\epsilon}\right] \\ &\quad + 2\gamma d (\|u_0\| + \beta) \frac{1}{4\epsilon} \qquad (2.4.18) \end{aligned}$$

$$B = 2a\gamma (\|u_0\| + \beta)\epsilon + \gamma^2 |c| \epsilon + \left[2\gamma d (\|u_0\| + \beta)\epsilon - \gamma^2 d\right]. \qquad (2.4.19)$$

Estimons $\epsilon > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ pour avoir $A \leq 0$ et $B \leq 0$. Pour cet object, $A \leq 0$ si

$$\epsilon \geq \frac{1}{8} \frac{2a\gamma (\|u_0\| + \beta) + \gamma^2 |c| + 2\gamma d (\|u_0\| + \beta)}{a + 2a\beta^2 - \gamma |c| (\|u_0\| + \beta)}.$$

Aussi, $B \leq 0$, si

$$\epsilon \leq \frac{\gamma d}{2(a+d)(\|u_0\| + \beta) + \gamma |c|}.$$

Choisissons β pour obtenir

$$\frac{1}{8} \frac{2a\gamma (\|u_0\| + \beta) + \gamma^2 |c| + 2\gamma d (\|u_0\| + \beta)}{a + 2a\beta^2 - \gamma |c| (\|u_0\| + \beta)} \leq \frac{\gamma d}{2(a+d)(\|u_0\| + \beta) + \gamma |c|}$$

ou

$$\begin{aligned} &4\left(4ad - (a+d)^2\right) \boldsymbol{\beta}^2 - 4\left(2(a+d)^2 \|u_0\| + |c|(a+3d)\gamma\right) \boldsymbol{\beta} \\ &- |c|^2 \gamma^2 - 4|c|(a+3d)\|u_0\|\gamma - 4(a+d)^2 \|u_0\|^2 + 8ad \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Cette inégalité est réalisée si on choisit β de manière que

$$\beta \leq \frac{4\begin{pmatrix} 2(a+d)^2 \|u_0\| \\ +|c|(a+3d)\gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \begin{pmatrix} 2(a+d)^2 \|u_0\| \\ +|c|(a+3d)\gamma \end{pmatrix}^2 \\ -16\left(4ad - (a+d)^2\right) \begin{pmatrix} |c|^2 \gamma^2 + 4|c|(a+3d)\|u_0\|\gamma \\ +4(a+d)^2 \|u_0\|^2 + 8ad \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{1/2}}{8\left(4ad - (a+d)^2\right)}.$$

Donc, si nous prenons

$$\frac{1}{8}\frac{2a\gamma\left(\|u_0\|+\beta\right)+\gamma^2|c|+2\gamma d\left(\|u_0\|+\beta\right)}{a+2a\beta^2-\gamma|c|\left(\|u_0\|+\beta\right)}\leq\epsilon\leq\frac{\gamma d}{2\left(a+d\right)\left(\|u_0\|+\beta\right)+\gamma|c|}$$

$$\beta\leq\frac{\begin{pmatrix}2\left(a+d\right)^2\|u_0\|\\+|c|\left(a+3d\right)\gamma\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2\left(a+d\right)^2\|u_0\|\\+|c|\left(a+3d\right)\gamma\end{pmatrix}^2\\-\left(4ad-\left(a+d\right)^2\right)\begin{pmatrix}|c|^2\gamma^2+4|c|\left(a+3d\right)\|u_0\|\gamma\\+4\left(a+d\right)^2\|u_0\|^2+8ad\end{pmatrix}\end{pmatrix}^{1/2}}{2\left(4ad-\left(a+d\right)^2\right)}$$

on obtient que $L'(t)\leq 0$, pour tout $t\in(0,T_{\max})$ ■

Preuve du Théorème 2.4.2.

Comme φ est une fonction continue et comme u est bornée; alors, à partir de la condition (H6), il existe une constante positive $M>0$ telle que

$$0\leq f\left(x,t,u,v\right)\leq Me^{\sigma v}. \tag{2.4.20}$$

Choisissons $\gamma=n\sigma$ dans le Lemme 2.4.1; alors il existe une constante $\beta>0$ telle que pour la fonctionnelle

$$L_0\left(t\right)=\int_\Omega e^{(u+\beta)^2+n\sigma v}dx \tag{2.4.21}$$

on aura

$$L_0'\left(t\right)\leq 0,\ \text{pour tout } t\in\left(0,T_{\max}\right). \tag{2.4.22}$$

Comme $u\geq 0$, alors de (2.4.21)-(2.4.22) on obtient

$$\int_\Omega e^{n\sigma v(t)}dx\leq meas\left(\Omega\right)e^{\left(\|u_0\|_\infty+\beta\right)^2+n\sigma\|v_0\|_\infty}\ \text{pour tout } t\in\left(0,T_{\max}\right). \tag{2.4.23}$$

Il en résulte que $e^{\sigma v}\in L^\infty\left([0,T_{\max});L^n\left(\Omega\right)\right)$ et

$$\sup_{0\leq t<T_{\max}}\left\|e^{\sigma v(t)}\right\|_n\leq\left[meas\left(\Omega\right)\right]^{1/n}e^{\frac{1}{n}\left(\|u_0\|_\infty+\beta\right)^2+\sigma\|v_0\|_\infty} \tag{2.4.24}$$

et par suite, de (2.4.20) et (2.4.24), on aura $f\left(.,.,u,v\right)\in L^\infty\left([0,T_{\max});L^n\left(\Omega\right)\right)$ et

$$\sup_{0\leq t<T_{\max}}\left\|f\left(.,t,u,v\right)\right\|_n\leq M\left[meas\left(\Omega\right)\right]^{1/n}e^{\frac{1}{n}\left(\|u_0\|_\infty+\beta\right)^2+\sigma\|v_0\|_\infty} \tag{2.4.25}$$

où $\|.\|_n$ est la norme de l'espace de Lebesgue $L^n(\Omega)$.

De (2.4.9), on obtient

$$\begin{aligned} v(t) &= S_d(t)\left(v_0 - \frac{c}{a-d}u_0\right) + \frac{c}{a-d}u(t) \\ &+ \left(-\rho + \frac{c}{a-d}\right)\int_0^\alpha S_d(t-s) f(.,s,u(s),v(s))\, ds. \end{aligned} \tag{2.4.26}$$

Finalement, pour $\alpha > 0$ et $0 < T - \alpha < T_{\max}$, nous avons à partir de (2.4.9) que pour tout $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned} v(t+\alpha) &= S_d(\alpha)v(t) + \frac{c}{a-d}u(t+\alpha) - \frac{c}{a-d}S_d(\alpha)u(t) \\ &+ \left(-\rho + \frac{c}{a-d}\right)\int_0^\alpha S_d(t-s) f(.,t+\alpha-s,u(t+\alpha-s),v(t+\alpha-s))\, ds. \end{aligned} \tag{2.4.27}$$

Utilisant l'estimation (1.1) de [16] avec $\varepsilon = \frac{n}{2}$, il en résulte qu'il existe une constante $c(n) > 0$ telle que si $0 < \alpha \leq 1$, alors

$$\|S_d(\alpha)v(t)\|_\infty \leq \frac{c(n)}{\alpha^{2/3}}\|v(t)\|_n,$$

$$\begin{aligned} &\|S_d(t-s) f(.,t+\alpha-s,u(t+\alpha-s),v(t+\alpha-s))\|_\infty \\ \leq\ & \frac{c(n)}{s^{2/3}}\|f(.,t+\alpha-s,u(t+\alpha-s),v(t+\alpha-s))\|_n. \end{aligned}$$

Comme $v^n \leq \frac{n!}{n^n\sigma^n}e^{n\sigma v}$, nous obtenons par (2.4.24) et (2.4.25) que

$$\|S_d(\alpha)v(t)\|_\infty \leq \frac{c(n)}{\alpha^{2/3}}\frac{n!}{n\sigma}[meas(\Omega)]^{1/n} e^{\frac{1}{n}\left(\|u_0\|_\infty+\beta\right)^2+\sigma\|v_0\|_\infty}, \tag{2.4.28}$$

$$\begin{aligned} &\|S_d(t-s) f(.,t+\alpha-s,u(t+\alpha-s),v(t+\alpha-s))\|_\infty \\ \leq\ & \frac{c(n)}{s^{2/3}}M[meas(\Omega)]^{1/n} e^{\frac{1}{n}\left(\|u_0\|_\infty+\beta\right)^2+\sigma\|v_0\|_\infty}. \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

En outre

$$\|S_d(\alpha)u(t)\|_\infty \leq M_d e^{\omega\alpha}\|u_0\|_\infty \tag{2.4.30}$$

où M_d et ω sont telles que $\|S_d(t)\| \leq M_d e^{\omega\alpha}$, pour tout $t \geq 0$.

Via (2.4.28), (2.4.29) et (2.4.30) et par (2.4.27), on obtient

$$\begin{aligned} \|v(t+\alpha)\|_\infty \leq\ & \frac{c}{a-d}\|u_0\|_\infty(1+M_d e^{\omega\alpha}) \\ & + c(n)\left[\frac{1}{\alpha^{2/3}}\frac{n!}{n\sigma} + 3M\sqrt[3]{\alpha}\left(-\rho+\frac{c}{a-d}\right)\right] \\ & [meas(\Omega)]^{1/n} e^{\frac{1}{n}\left(\|u_0\|_\infty+\beta\right)^2+\sigma\|v_0\|_\infty} \end{aligned} \tag{2.4.31}$$

d'après (2.4.31) on aura

$$\|v(t)\|_\infty \leq C\left(\alpha, \|u_0\|_\infty, \|v_0\|_\infty\right) \text{ pour tout } t \in [0, T_{\max}). \tag{2.4.32}$$

Par conséquent, à partir de (2.4.8) et (2.4.32), on établit l'existence globale de la solution (u, v); c'est-à-dire $T_{\max} = +\infty$. ■

Chapitre 3

Systèmes de Réaction-Diffusion de type Gierer-Meinhardt

3.1 Introduction

La formation des modèles dans le développement d'une organisation plus élevée hors d'un œuf simple fertilisé ou d'un tissu végétal est l'aspect le plus fascinant de la biologie. Une question centrale est pourquoi les palmes se disposent d'une manière organisée sur le stipe d'une plante? Cependant, un regard sur la nature inorganique indique que la formation de modèles (En anglais: Pattern formation) n'est pas particulière aux objets vivants. La formation de modèles est également la règle dans le monde non vivant; comme la formation de galaxies, nuages, chute de pluie, foudres, cristaux, érosion, toutes témoignent de la génération de structures commandées.

Il est instructif pour rechercher des principes communs dans la génération de ces structures; si une petite déviation d'une distribution homogène a une rétroaction positive forte sur elle-même, la déviation augmentera. Par exemple, l'érosion procède plus rapidement à l'endroit ayant déja subi des dommages initiaux aléatoires, et les fleuves contournés sont formés en dépit de la réparation homogène de la pluie presque tout le pays. Une grande dune de sable peut résulter d'une pierre dans un désert qui produit un abri de vent et peut accélérer ainsi localement le dépôt du sable; ce dépôt augmente l'avantage de la probabilité de dépôt de sable, et ainsi de suite.

En Biologie; *Alfred Gierer* et *Hans Meinhardt* ont formalisé cette observation et ont proposé un modèle moléculaire plausible pour modéliser la formation, composé de deux équations aux dérivées partielles formant un Système de Réaction-Diffusion à réaction fractionnaire de type activateur-inhibiteur:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = \rho\dfrac{a^2}{h} - \mu_a a + D_a\dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \rho_a \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = \rho a^2 - \mu_h h + D_h\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} \end{cases} \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega, \ t > 0 \qquad (3.1.1)$$

Dans ce système, a est une substance autocatalytique à courte portée, (i.e.) activateur et h est son antagoniste à longue portée, (i.e.) inhibiteur, $\dfrac{\partial a}{\partial t}$ décrit le changement de la concentration de l'activateur a par rapport au temps. Le premier terme du membre de droite $(\rho\dfrac{a^2}{h})$ décrit le taux de production qui dépend non linéairement de la concentration de l'activateur et de l'inhibiteur. Le nombre de molécules délabrées par rapport au temps est proportionnel au taux de décomposition (μ_a) et au nombre de molécules actuelles (a) (comme dans une ville le nombre de personnes décédées dépend du nombre d'habitants). L'échange des molécules est modélisé par la diffusion $(D_a\dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2})$, (il y a d'autres modes possibles de propagation). La deuxième équation décrit en termes analogues le changement de la concentration de l'inhibiteur. ρ_a est un petit taux de production d'activateur qui est exigé pour lancer l'autocatalyse d'activateur à une concentration très basse (par exemple, dans le cas de la régénération).

Le modèle décrit la concentration d'une substance autocatalytique à courte portée; l'activateur, qui règle la production de son antagoniste à longue portée, l'inhibiteur (Gierer et Meinhardt, 1972, Gierer, 1981, Meinhardt, 1982). C'est certainement un modèle minimal, mais il fournit un pont théorique entre les observations d'une part et la déduction des mécanismes moléculaire-génétiques fondamentaux d'autre part.

La possibilité de construire de modèles par la réaction de deux substances qui diffusent avec différents taux a été découverte par *Turing* (1952) [48]. *Gierer* et *Meinhardt* [15] ont prouvé que même si cette condition est satisfaite, seulement une classe très spéciale des réactions peut former des modèles dans le cas de l'autocatalyse locale et l'inhibition de long-portée. Des différentes réalisations sont possibles : L'inhibition peut résulter d'un épuisement où l'autocatalyse peut être basée sur une inhibition d'une

inhibition. L'équation de Turing satisfait cette condition. Au terme de mécanisme de Gierer-Meinhardt, l'inhibition résulte d'un déplacement d'activateur par la diffusion rapide de la substance.

3.2 Exemple de modélisation

Comment la coquille de mer s'embellit avec de telles couleurs?

Une cellule productrice-colorante infecte une voisine et après une partie de retard cette cellule également devient coloré et déclenche alternativement la prochaine voisine, et ainsi de suite jusqu'à la génération des lignes obliques.

Les modèles de la production de colorants sont plus communs avec les modèles des formations. La situation générale presque dans tous les modèles qui forment des systèmes est que les groupes des cellules se développent différemment de leurs voisines.

Pour la modélisation, supposons que la coloration dans la coquille est sous la commande d'une molécule; l'activateur a. La réaction inhibitrice peut résulter de l'épuisement d'un substrat, s.

La formulation mathématique de ces interactions (activateur-substrat) est donnée par le système de réaction-diffusion de type Gierer-Meinhardt (compliqué) suivant (voir Meinhardt [31]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = \rho s a^{2^*} - \mu a + D_a \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} = \sigma - \rho s a^{2^*} - \nu s + D_s \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \end{cases}$$

où

$$a^{2^*} = \frac{a^2}{1 + k a^2} + \rho_0.$$

L'activateur, a et sa molécule précurseuse, le substrat s, diffusent d'une cellule à une autre avec les taux D_a et D_s respectivement et se délabrent avec les taux μ et ν. Le substrat s produit avec le taux constant σ. La constante k est un paramètre de contrôle, ρ représente la densité de source et ρ_0 est une valeur initiale de production. Ces équations nous permettent de calculer le changement de concentration de a et de s pendant un intervalle de temps.

3.3 Etude de l'existence globale des solutions de système de Gierer-Meinhardt d'ordre deux

Le système de Gierer-Meinhardt (3.1.1) d'ordre deux est l'origine des systèmes formés d'un activateur (a) et inhibiteur (h) , l'existence globale des solutions avec conditions aux bord de Neumann et conditions initiales $a(x,0)>0$ et $h(x,0)>0$ a été prouvée par Roth [44] en 1984 pour $N \leq 3$, le même résultat est obtenu par Wu et Li [49] en 1990, à condition que $a,\ h^{-1}$ et ρ_a soient convenablement petits.

D'une manière générale considérons le système de Réaction-Diffusion qui généralise le système de Gierer-Meinhardt (3.1.1) (voir [15])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \Delta u_1 - \mu u_1 + b_1 \dfrac{u_1^p}{u_2^q} + \sigma, & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a_2 \Delta u_2 - \nu u_2 + b_2 \dfrac{u_1^r}{u_2^s}, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \tag{3.3.2}$$

avec conditions aux bords de Neumann

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0, \qquad x \in \Gamma, t > 0, \tag{3.3.3}$$

et conditions initiales

$$u_1(x,0) = \psi_1(x) > 0, \qquad x \in \Omega, \tag{3.3.4}$$

$$u_2(x,0) = \psi_2(x) > 0, \qquad x \in \Omega, \tag{3.3.5}$$

où:

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné de frontière Γ régulière.

Les constantes de diffusions: a_1 et a_2 sont supposées positives.

$\mu,\ \nu,\ \sigma,\ b_1$ et b_2 sont des constantes positives,

p, q, r et s: des indices non négatifs avec $p > 1$.

$0 < b_1 \leq b_2$.

En 1987, K. Masuda et K. Takahashi [36] ont prouvé l'existence globale des solutions du système (3.3.2) sous la condition $\frac{p-1}{r} < \frac{2}{N+2}$. Après quelques années, L. Mingde, C. Shaohua et Q. Yuchun [35] ont trouvé en 1995 de meilleurs résultats, ils ont démontré l'existence globale sous la condition $r > p-1$ et $rq > (p-1)(s+1)$ pour des conditions

initiales arbitraires, ils ont prouvé aussi l'explosion en temps fini des solutions dans le cas où $r > p-1$ avec $rq < (p-1)(s+1)$ ou $r > p-1$ pour certaines valeurs initiales, presque les mêmes résultats ont été démontré par Ph. Souplet et P. Quitner [43], Ils ont établi l'existence globale des solutions sous la condition $\frac{p-1}{r} < \min\left(\frac{q}{s+1}, 1\right)$ et l'explosion sous $\frac{p-1}{r} > \min\left(\frac{q}{s+1}, 1\right)$, $\frac{p-1}{r} \neq 1$.

Remarque 3.3.1 *1) Les auteurs de [35] et [43] ont prouvé l'explosion en temps fini pour les systèmes EDO associés.*

2) Dans les deux derniers travaux, les auteurs ont supposé que $b_1 = b_2 = 1$, on va analyser ces méthodes mais avec une hypothèse plus générale; $0 < b_1 \leq b_2$.

3) Pour plus de détail sur la discussion d'existence locale des solutions, voir [18], [45], [43] et autres.

3.3.1 Principe de Maximum

Les résultats essentiels sont les suivants

I) Soit $(u_1(t,.), u_2(t,.))$ la solution de (3.3.2). Alors pour tout (t,x) dans $(0, T_{\max}) \times \overline{\Omega}$, on a

$$u_1(t,x) \geq e^{-b_1 t} \min_{\overline{\Omega}} (\psi_1(x)) > 0, \tag{3.3.6}$$
$$u_2(t,x) \geq e^{-b_2 t} \min_{\overline{\Omega}} (\psi_2(x)) > 0. \tag{3.3.7}$$

Ces bornes nous donne que si $T_{\max} < \infty$, alors $\lim_{t \to T_{\max}} \sup \|u_1(t)\|_\infty = \infty$

II) Il existe une constante $c > 0$ telle que

$$u_1, u_2 \geq c, \qquad x \in \overline{\Omega}, \quad 0 < t < T_{\max}. \tag{3.3.8}$$

Comme $(u_1)_t - a_1 \Delta u_1 > 0$ dans $\{u_1 < \sigma/\mu\}$, on a $u_1 \geq \delta_1 := \min(\sigma/\mu, \min_{\overline{\Omega}} \psi_1)$ dans $\overline{\Omega} \times [0, \infty[$. Alors u_2 satisfait $(u_2)_t - a_2 \Delta u_2 > 0$ dans $\left\{u_2 < (\delta_1^r/\nu)^{1/(s+1)}\right\}$ et $u_2 \geq \delta_2 := \min\left((\delta_1^r/\nu)^{1/(s+1)}, \min_{\overline{\Omega}} \psi_2\right)$ dans $\overline{\Omega} \times [0, \infty[$. Prenons $c = \max(\delta_1, \delta_2)$. voir [43].

Lemme 3.3.1 *Soit p, q, r et s des constantes telles que, $r > p-1$ et $rq > (p-1)(s+1)$. Pour tous h, α, $\beta > 0$, il existe $c = c(h, \alpha, \beta) > 0$ et $\theta = \theta(\alpha) \in (0,1)$, telles que,*

$$\alpha \frac{u^{p-1+\alpha}}{v^{q+\beta}} \leq \beta \frac{u^{r+\alpha}}{v^{s+1+\beta}} + c \left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}} \right)^{\theta}, \qquad \text{où} \qquad u \geq 0, v \geq h.$$

Preuve. (voir [43] page 298) ∎

Lemme 3.3.2 *Supposons que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$. Alors pour tout ensemble d'indices p_0, q_0, α, β et λ satisfaisant $\lambda < p_0 < \alpha$ (non nécessairement positifs) et pour toute constante $c > 0$, on a*

$$\int_{\Omega} \frac{u^{p_0}}{v^{q_0}} d\Omega \leq c \int_{\Omega} \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}} d\Omega + c^{-(p_0-\lambda)/(\alpha-p_0)} \int_{\Omega} \frac{u^{\lambda}}{v^{\theta}} d\Omega,$$

où

$$\theta = \left[q_0(\alpha - \lambda) - \beta(p_0 - \lambda) \right] (\alpha - p_0)^{-1}.$$

Preuve. Par une application de l'inégalité de Young on achève la preuve.(voir [35]). ∎

Lemme 3.3.3 *Soient u_1, u_2, solutions du problème (3.3.2). Alors on a:*

$$\begin{array}{lrcl} 1) & \left\| \dfrac{1}{u_1} \right\|_{\infty} & \leq & \max \left(\dfrac{\mu}{\sigma}, \left\| \dfrac{1}{\psi_1} \right\| \right)_{\infty} := B_1. \\ 2) & \left\| \dfrac{1}{u_2} \right\|_{\infty} & \leq & \max \left(\left(\dfrac{b_2}{\nu} \right)^{\frac{1}{s+1}} B_1^{\frac{r}{s+1}}, \left\| \dfrac{1}{\psi_2} \right\|_{\infty} \right) := B_2. \end{array}$$

Preuve. 1) On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{u_1^k} d\Omega &= -k \int_{\Omega} \frac{1}{u_1^{k+1}} \left(a_1 \Delta u_1 - \mu u_1 + b_1 \frac{u_1^p}{u_2^q} + \sigma \right) d\Omega, \text{ où } k \text{ est un entier positif,} \\ &= -k a_1 \int_{\Omega} \frac{1}{u_1^{k+1}} \Delta u_1 d\Omega + k\mu \int_{\Omega} \frac{1}{u_1^k} d\Omega - k b_1 \int_{\Omega} \frac{u_1^{p-k-1}}{u_2^q} d\Omega - k\sigma \int_{\Omega} \frac{1}{u_1^{k+1}} d\Omega. \end{aligned}$$

Appliquons la formule de Green pour le terme $\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_1^{k+1}}\Delta u_1 d\Omega$, (en tenant compte des conditions aux bords de Neumann), et puis utilisons l'inégalité de Young pour le terme $k\mu\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_1^k}d\Omega$ pour obtenir

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_1^k}d\Omega \leq k\sigma^{-k}\mu^{k+1}\left|\Omega\right|.$$

Intégrant les deux membres de cette inégalité de 0 à t, on aura

$$\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_1^k}d\Omega \leq \int\limits_{\Omega}\frac{1}{\psi_1^k}d\Omega + k\sigma^{-k}\mu^{k+1}\left|\Omega\right| t.$$

En élevant les deux membres à la puissance $\frac{1}{k}$ et en faisant tendre k vers $+\infty$, on trouve

$$\left\|\frac{1}{u_1}\right\|_\infty \leq \max(\frac{\mu}{\sigma}, \left\|\frac{1}{\psi_1}\right\|_\infty) = B_1.$$

2) D'une façon similaire on a

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_2^k}d\Omega = -k\left(k+1\right)a_2\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_2^{k+2}}\left|\nabla u_2\right|^2 d\Omega + k\nu\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_2^k}d\Omega - kb_2\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^r}{u_2^{s+k+1}}d\Omega.$$

En utilisant le Lemme 3.3.2 pour $\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_2^k}d\Omega$, on obtient

$$\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_2^k}d\Omega \leq \frac{b_2}{\nu}\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^r}{u_2^{s+k+1}}d\Omega + \left(\frac{b_2}{\nu}\right)^{-k/s+1}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_1^{kr/s+1}}d\Omega,$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_2^k}d\Omega \leq k\left(b_2\right)^{-\frac{k}{s+1}}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{-\frac{k}{s+1}-1}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_1^{kr/s+1}}d\Omega \leq k\left(b_2\right)^{-\frac{k}{s+1}}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{-\frac{k}{s+1}-1}\left|\Omega\right|\left\|\frac{1}{u_1}\right\|_\infty^{kr/s+1}.$$

Intégrons de 0 à t, élevons à la puissance $\frac{1}{k}$ et faisons tendre k vers $+\infty$, pour avoir

$$\left\|\frac{1}{u_2}\right\|_\infty \leq \max\left(\left(\frac{b_2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{s+1}}B_1^{\frac{r}{s+1}}, \left\|\frac{1}{\psi_2}\right\|_\infty\right) = B_2.$$

■

Théorème 3.3.1 *Supposons que $r > p-1$ et $rq > (s+1)(p-1)$, alors, pour toute $\psi_1, \psi_2, \psi_1^{-1}, \psi_2^{-1} \in L^\infty(\Omega)$, le problème (3.3.2) admet une solution globale et bornée dans l'intervalle de temps $(0, \infty)$.*

Preuve. Pour tout $n > 2$, soit $m > 0$ suffisamment petit, tel que

$$\frac{mn^2(a_1+a_2)^2}{4(m+1)a_2} \leq a_1 n(n-1), \text{ et } n\mu - 3m\nu > 0.$$

Soit $w(t) = \int\limits_\Omega u_1^n u_2^{-m} d\Omega$. Démontrons d'abords que $w(t)$ est bornée pour tout $t > 0$.

Dérivant $w(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
w'(t) &= n\int\limits_\Omega \frac{u_1^{n-1}}{u_2^m}\left(a_1\Delta u_1 - \mu u_1 + b_1\frac{u_1^p}{u_2^q} + \sigma\right)d\Omega - m\int\limits_\Omega \frac{u_1^n}{u_2^{m+1}}\left(a_2\Delta u_2 - \nu u_2 + b_2\frac{u_1^r}{u_2^s}\right)d\Omega \\
&= n(n-1)a_1\int\limits_\Omega \frac{u_1^{n-2}}{u_2^m}\left|\nabla u_1\right|^2 d\Omega + mn(a_1+a_2)\int\limits_\Omega \frac{u_1^{n-1}}{u_2^{m+1}}\nabla u_1 \nabla u_2 d\Omega - \mu m w(t) \\
&\quad + nb_1\int\limits_\Omega \frac{u_1^{n-1+p}}{u_2^{m+q}}d\Omega + n\sigma\int\limits_\Omega \frac{u_1^{n-1}}{u_2^m}d\Omega - m(m+1)a_2\int\limits_\Omega \frac{u_1^n}{u_2^{m+2}}\left|\nabla u_2\right|^2 d\Omega + \nu m w(t) \\
&\quad - mb_2\int\limits_\Omega \frac{u_1^{n+r}}{u_2^{m+s+1}}d\Omega.
\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy on aura

$$\begin{aligned}
\left|mn(a_1+a_2)\int\limits_\Omega \frac{u_1^{n-1}}{u_2^{m+1}}\nabla u_1\nabla u_2 d\Omega\right| &\leq m(m+1)a_2\int\limits_\Omega \frac{u_1^n}{u_2^{m+2}}\left|\nabla u_2\right|^2 d\Omega \\
&\quad + \frac{mn^2(a_1+a_2)^2}{4(m+1)a_2}\int\limits_\Omega \frac{u_1^{n-2}}{u_2^m}\left|\nabla u_1\right|^2 d\Omega.
\end{aligned}$$

Donc on a

$$w'(t) \leq nb_1\int\limits_\Omega \frac{u_1^{n-1+p}}{u_2^{m+q}}d\Omega - mb_2\int\limits_\Omega \frac{u_1^{n+r}}{u_2^{m+s+1}}d\Omega - (\mu n - \nu m)w(t) + n\sigma\int\limits_\Omega \frac{u_1^{n-1}}{u_2^m}d\Omega.$$

Après, choisissons $\epsilon \in (0, n)$ tel que

$$k = \frac{n\left[rq - (s+1)(p-1)\right]}{\epsilon(r+1-p)} + n\frac{q-s-1}{r+1-p} + m \geq 0.$$

appliquant le Lemme 3.3.2, en prenant $\alpha = r+n$, $\beta = s+1+m$ et $\lambda = n-\epsilon$, on trouve

$$nb_1 \int_\Omega \frac{u_1^{n-1+p}}{u_2^{m+q}} d\Omega \leq mb_2 \int_\Omega \frac{u_1^{n+r}}{u_2^{m+s+1}} d\Omega + \varsigma_1 \int_\Omega \frac{u_1^{n-\epsilon}}{u_2^{\theta}} d\Omega,$$

où

$$\begin{aligned} \theta &= [(m+q)(r+\epsilon) - (s+1+m)(p-1+\epsilon)](r+1-p)^{-1} \\ &= [rq - (s+1)(p-1) + \epsilon(q-s-1)](r+1-p)^{-1} + m, \end{aligned}$$

$$\varsigma_1 = nb_1 (mb_2 / nb_1)^{-(p-1+\epsilon)/(r+1-p)}.$$

Ensuite, appliquant le Lemme 3.3.2 en prenant: $\alpha = n$, $\beta = m$ et $\lambda = 0$, on aura

$$\varsigma_1 \int_\Omega \frac{u_1^{n-\epsilon}}{u_2^{\theta}} d\Omega \leq m\nu \int_\Omega \frac{u_1^{n}}{u_2^{m}} d\Omega + \varsigma_2 \int_\Omega \frac{1}{u_2^{k}} d\Omega,$$

où

$$\varsigma_2 = \varsigma_1 (m\nu / \varsigma_1)^{-(n-\epsilon)/\epsilon}.$$

D'une manière analogue, on obtient

$$n\sigma \int_\Omega \frac{u_1^{n-1}}{u_2^{m}} d\Omega \leq m\nu \int_\Omega \frac{u_1^{n}}{u_2^{m}} d\Omega + \varsigma_3 \int_\Omega \frac{1}{u_2^{m}} d\Omega,$$

où

$$\varsigma_3 = n[\sigma m\nu / (n\sigma)]^{-(n-1)}.$$

Enfin, on a

$$w'(t) \leq \varsigma_2 \int_\Omega \frac{1}{u_2^{k}} d\Omega + \varsigma_3 \int_\Omega \frac{1}{u_2^{m}} d\Omega - (n\mu - 3m\nu) w(t),$$

multipliant par $\exp[(n\mu - 3m\nu)t]$ et appliquant le Lemme 3.3.3, on obtient

$$\frac{d}{dt}(w(t)\exp[(n\mu - 3m\nu)t]) \leq (\varsigma_2 B_2^k + \varsigma_3 B_2^m)|\Omega| \exp[(n\mu - 3m\nu)t].$$

Intégrant de 0 à t, on aura

$$w(t) = \int_\Omega \frac{u_1^{n}}{u_2^{m}} d\Omega \leq (\varsigma_2 B_2^k + \varsigma_3 B_2^m)|\Omega| \exp\left[(n\mu - 3m\nu)^{-1}\right] + w(0) := B_3. \tag{3.3.9}$$

Maintenant, démontrons que u_1 et u_2 sont bornées en utilisant l'estimation (3.3.9). Il est bien connu que le problème (3.3.2) a une paire de solutions locales uniques $u_1, u_2 \in C^{2,1}(\Omega \times (0, 2\tau))$, pour certain $\tau > 0$. Supposons $Au_1 = d\Delta u_1 - \mu u_1$, alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe $\{e^{tA} \,|0 \leq t < \infty\}$ dans $L^\alpha(\Omega)$, de domaine

$$D(A) = \left\{ u_1 \left| u_1 \in W^{2,\alpha}, \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0 \right. \right\},$$

où $\alpha = N(N+1) \diagup 2$ et N est la dimension de $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs il existe des constantes $\varsigma > 1$ et $\delta > 0$, telles que

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} e^{tA} \right\| \leq \varsigma \left(1 + t^{-\frac{1}{2}}\right) e^{-\delta t}, \qquad t > 0, \tag{3.3.10}$$

où $\|.\|$ dénote la norme de $L^\alpha(\Omega)$. Ainsi la première équation du système (3.3.2) avec $\dfrac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0$ et $u_1(x, 0) = \psi_1(x)$, est équivalente à l'équation intégrale

$$u_1(t) = e^{tA}\psi_1 + \int_0^t e^{(t-s)A} \left[b_1 u_1^p(s)\, u_2^{-q}(s) + \sigma\right] ds.$$

Utilisant le théorème 1.6.1 cité au [18] et (3.3.10), on obtient

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega}} u_1(.,t) &\leq \left\| A^{\frac{1}{2}} u_1(t) \right\| && (3.3.11) \\ &\leq \varsigma \left(1 + t^{-\frac{1}{2}}\right) e^{-\delta t} \|\psi_1\| + \varsigma \int_0^t e^{-\delta(t-s)} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \left\| b_1 \frac{u_1^p}{u_2^q} + \sigma \right\| ds. \end{aligned}$$

Supposons $n > \alpha p$ et $nq > pm$. Appliquant le Lemme 3.3.2, on trouve

$$\left\| \frac{u_1^p}{u_2^q} \right\|^\alpha = \int_\Omega \frac{u_1^{p\alpha}}{u_2^{q\alpha}} d\Omega \leq \int_\Omega \frac{u_1^n}{u_2^m} d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{u_2^\gamma} d\Omega, \tag{3.3.12}$$

où $\gamma = (\alpha q n - \alpha p m)(n - \alpha p)^{-1} > 0$. Alors les estimations (3.3.9), le Lemme 3.3.3, et les équations (3.3.11), (3.3.12) impliquent

$$\max u_1(.,t) \leq M \left(1 + t^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad t > \tau. \tag{3.3.13}$$

Il résulte de (3.3.13) et du principe du maximum que la solution est bornée. ∎

Chapitre 4

Existence globale de solutions pour certains systèmes de R-D de type Gierer-Meinhardt

4.1 Existence globale et Explosion en temps fini de solutions à trois composantes de systèmes de R-D de type Gierer-Meinhardt

Le développement d'une plante, en biologie végétale, passe par une chaine d'étapes de formation des modèles, et parmi ces étapes, le phénomène de disposition des palmes sur le stipe (la tige) de la plante qu'on appelle en terme biologique: *La Phyllotaxie.* Meinhardt, Koch et Bernasconi [33] ont fait des études de modélisation dans ce domaine et ont proposé un modèle mathématique qui décrit un mécanisme de réaction fractionnaire entre un Activateur a et deux inhibiteurs h et s:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = D_a \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \mu_a a + \dfrac{a^2}{h(s+k_a)} + \sigma_a, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = D_h \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \mu_h h + a^2, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} = D_s \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \mu_s s + a. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Plus généralement, considérons le système de réaction-diffusion à trois équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a_1 \Delta u - \mu_1 u + \dfrac{u^{p_1}}{v^{q_1}(w^{r_1} + \hat{c})} + \sigma, & x \in \Omega, t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = a_2 \Delta v - \mu_2 v + \dfrac{u^{p_2}}{v^{q_2} w^{r_2}}, & x \in \Omega, t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = a_3 \Delta w - \mu_3 w + \dfrac{u^{p_3}}{v^{q_3} w^{r_3}}, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

avec conditions aux bords de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \qquad x \in \Gamma, t > 0, \tag{4.1.3}$$

et conditions initiales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \xi_1(x) > 0 \\ v(x,0) &= \xi_2(x) > 0 \\ w(x,0) &= \xi_3(x) > 0 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

où $\xi_i \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ pour tout $i = 1, 2, 3$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné de classe C^1 de frontière $\partial\Omega = \Gamma$.

Les constantes de diffusions: a_1, a_2 et a_3 sont supposées positives.

μ_1, μ_2 et μ_3 sont des constantes positives,

p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 et r_3: des indices non négatifs.

$\sigma > 0$, $\hat{c} \geq 0$.

4.1.1 Etude de l'existence globale en temps des solutions

Présentons d'abord quelques hypothèses et conditions que nous allons utiliser dans la suite.

Supposons que

$$0 < p_1 - 1 < \max\left\{p_2 \min\left(\frac{q_1}{q_2+1}, \frac{r_1}{r_2}, 1\right), p_3 \min\left(\frac{r_1}{r_3+1}, \frac{q_1}{q_3}, 1\right)\right\}. \tag{4.1.5}$$

Posons

$$A_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2\sqrt{a_i a_j}} \text{ pour } i, j = 1, 2, 3 \quad .$$

Soient α, β et γ des constantes positives telles que

$$\alpha > 2\max\left\{1, \frac{\beta\mu_2 + \gamma\mu_3}{\mu_1}\right\}, \tag{4.1.6}$$

$$\frac{1}{\beta} > A_{12}^2 - 1, \tag{4.1.7}$$

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{\beta+1}{\beta} - A_{12}^2\right)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{\gamma+1}{\gamma} - A_{13}^2\right) > \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}A_{23} - A_{12}A_{13}\right)^2. \tag{4.1.8}$$

Proposition 4.1.1 *Le système(4.1.2) avec (4.1.3) et (4.1.4) admet une solution classique locale unique* (u, v, w) *dans* $(0, T_{\max}) \times \Omega$. *Si* $T_{\max} < \infty$ *alors*

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} \left(\|u(t,.)\|_\infty + \|v(t,.)\|_\infty + \|w(t,.)\|_\infty\right) = \infty$$

Preuve. Pour la preuve, voir Henry [18] et Ryan [45]. ■

Lemme 4.1.1 *Soient* p, q, r, s, m, *et* n *des constantes telles que*

$$\begin{aligned} r &> p-1 \\ rm &> (p-1)(n) \\ rq &> (p-1)(s+1) \end{aligned}$$

Pour tous h, l, α, β, $\gamma > 0$, *il existe* $C = C(h, l, \alpha, \beta, \gamma) > 0$ *et* $\theta = \theta(\alpha) \in (0, 1)$, *telles que*

$$\alpha\frac{x^{p-1+\alpha}}{y^{q+\beta}z^{m+\gamma}} \leq \beta\frac{x^{r+\alpha}}{y^{s+1+\beta}z^{n+\gamma}} + C\left(\frac{x^\alpha}{y^\beta z^\gamma}\right)^\theta, \qquad \text{où} \qquad x \geq 0, y \geq h, z \geq l.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \alpha\frac{x^{p-1}}{y^q z^m} &= \alpha\left(\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}} y^{-q} y^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}} z^{-m} z^{\frac{(n)(p-1)}{r}} \\ &= \alpha\beta^{-\frac{p-1}{r}}\left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}} y^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q} z^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m} \\ &= \alpha\beta^{-\frac{p-1}{r}}\left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{-\epsilon} y^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q} z^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m}, \end{aligned}$$

pour un certain ϵ qui satisfait

$$0 < \epsilon < \min\left(\frac{-\frac{(s+1)(p-1)}{r}+q}{(s+1)}, \frac{-\frac{(n)(p-1)}{r}+m}{(n)}, 1 - \frac{p-1}{r}\right). \tag{4.1.9}$$

Donc

$$\alpha\frac{x^{p-1}}{y^q z^m} = \alpha\left(\beta\right)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}(y)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}z^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n}.$$

D'après (4.1.9) on trouve

$$\frac{p-1}{r}+\epsilon<1,$$

$$\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)<0,$$

et

$$\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon(n)<0,$$

d'où

$$(y)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)} \leq h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}, \tag{4.1.10}$$

et

$$(z)^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon(n)} \leq l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon(n)}. \tag{4.1.11}$$

D'autre part, nous avons

$$\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} = \left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} y^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}y^{-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}z^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}z^{-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}, \tag{4.1.12}$$

$$y \geq h \Rightarrow y^{-\dfrac{\beta r\epsilon}{\alpha}} \leq h^{-\dfrac{\beta r\epsilon}{\alpha}}. \tag{4.1.13}$$

et

$$z \geq l \Rightarrow z^{-\dfrac{\gamma r\epsilon}{\alpha}} \leq l^{-\dfrac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}. \tag{4.1.14}$$

Donc, d'après (4.1.10), (4.1.11), (4.1.12), (4.1.13) et (4.1.14) on aura

$$\begin{aligned}
\alpha\frac{x^{p-1}}{y^q z^m} &= \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}(y)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}\,z^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n}\\
&\leq \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}\,l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n}\\
&= \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}\,l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n}y^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}y^{-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}z^{\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}z^{-\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}\\
&\leq \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}\,l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n}y^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}z^{\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}h^{-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}l^{-\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}\\
&= \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\,h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}\,l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n-\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}\left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{y^\beta z^\gamma}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Posant

$$C_1 = \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\,h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}\,l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n-\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}},$$

on obtient

$$\alpha\frac{x^{p-1}}{y^q z^m} \leq C_1\left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{y^\beta z^\gamma}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}.$$

Rappelons l'inégalité de Young-ε

$$fg \leq \varepsilon f^{p_0} + c_\varepsilon g^{q_0},\ \text{avec } f,g\geq 0, \varepsilon\geq 0, c_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{1}{p_0-1}}, p_0, q_0 > 0, \tfrac{1}{p_0}+\tfrac{1}{q_0} = 1.$$

Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{C_1}, \qquad f = \left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}, \qquad g = \left(\frac{y^\beta z^\gamma}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}, \qquad p_0 = \frac{1}{\frac{p-1}{r}+\epsilon}.$$

On a

$$\tfrac{1}{p_0}+\tfrac{1}{q_0} = 1 \ \text{ donne } \ q_0 = \frac{1}{1-\frac{p-1}{r}-\epsilon}.$$

Donc on obtient

$$\alpha\frac{x^{p-1}}{y^q z^m} \leq C_1\left(\frac{1}{C_1}\left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right) + \left(\frac{1}{C_1}\right)^{-\frac{p-1+r\epsilon}{r-(p-1)-r\epsilon}}\left(\frac{y^\beta z^\gamma}{x^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha\left(1-\frac{p-1}{r}-\epsilon\right)}}\right),$$

alors

$$\alpha\frac{x^{p-1}}{y^q z^m} \leq \left(\beta\frac{x^r}{y^{s+1}z^n}\right) + C_2\left(\frac{x^\alpha}{y^\beta z^\gamma}\right)^{-\frac{r\epsilon}{\alpha\left(1-\frac{p-1}{r}-\epsilon\right)}}, \qquad \text{où} \quad C_2 = C_1^{1+\frac{p-1+r\epsilon}{r-(p-1)-r\epsilon}},$$

ce qui donne

$$\alpha\frac{x^{p-1+\alpha}}{y^{q+\beta}z^{m+\gamma}}\leq\beta\frac{x^{r+\alpha}}{y^{s+1+\beta}z^{n+\gamma}}+C_2\left(\frac{x^{\alpha}}{y^{\beta}z^{\gamma}}\right)^{1-\frac{r\epsilon}{\alpha\left(1-\frac{p-1}{r}-\epsilon\right)}}.$$

Enfin, prenant ϵ suffisamment petit on obtient

$$\alpha\frac{x^{p-1+\alpha}}{y^{q+\beta}z^{m+\gamma}}\leq\beta\frac{x^{r+\alpha}}{y^{s+1+\beta}z^{n+\gamma}}+C\left(\frac{x^{\alpha}}{y^{\beta}z^{\gamma}}\right)^{\theta}.$$

■

Lemme 4.1.2 *Supposons que $u(x)>0,\ v(x)>0$ et $w(x)>0$. Alors pour tout ensemble d'indices $p,\ q\ ,r,\ m,\ n,\ \rho$ et λ satisfaisant $\lambda<p<m$ (non nécessairement positifs) et pour toute constante $c>0$, on a*

$$\int_{\Omega}\frac{u^{p}}{v^{q}w^{r}}dx\leq c\int_{\Omega}\frac{u^{m}}{v^{n}w^{\rho}}dx+c^{-(p-\lambda)\backslash(m-p)}\int_{\Omega}\frac{u^{\lambda}}{v^{\eta}w^{\theta}}dx$$

où

$$\eta=\frac{q(m-\lambda)-n(p-\lambda)}{m-p}\quad,\quad\theta=\frac{r(m-\lambda)-\rho(p-\lambda)}{m-p}.$$

Preuve. Par application de l'inégalité de Young on achève la preuve. ■

Lemme 4.1.3 *Soient u, v et w les solutions du problème (4.1.2)-(4.1.4). Alors on a:*

$$1)\quad\left\|\frac{1}{u}\right\|_{\infty}\leq\max\left(\left\|\frac{1}{\xi_1}\right\|_{\infty},\ \frac{\mu_1}{\sigma}\right)=A_1.\qquad(4.1.15)$$

$$2)\quad\left\|\frac{1}{vw}\right\|_{\infty}\leq\max\left(\begin{array}{c}\left\|\frac{1}{\xi_2\xi_3}\right\|_{\infty}\ ,\\ \\ \left(\frac{1}{\mu_2+\mu_3}\right)^{-\frac{2}{q_2+r_2+1}}A_1^{2p_2/q_2+r_2+1}\end{array}\right)=A_2.\qquad(4.1.16)$$

Preuve.

1) On a pour $\kappa>0$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\frac{1}{u^{\kappa}}dx&=-\kappa\int\frac{1}{u^{\kappa+1}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx\\&=-\kappa\int\frac{1}{u^{\kappa+1}}\left(a_1\Delta u-\mu_1u+\frac{u^{p_1}}{v^{q_1}(w^{r_1}+\hat{c})}+\sigma\right)dx\\&=-\kappa a_1\int\left(u^{-\kappa-1}\right)(\Delta u)\,dx+\kappa\mu_1\int\frac{1}{u^{\kappa}}dx-\kappa\int\frac{u^{p_1-\kappa-1}}{v^{q_1}(w^{r_1}+\hat{c})}dx-\kappa\sigma\int\frac{1}{u^{\kappa+1}}dx.\end{aligned}$$

Utilisant la formule de Green, on aura

$$\int \left(u^{-\kappa-1}\right)(\Delta u)\,dx = (\kappa+1)\int \frac{1}{u^{\kappa+2}}\left|\nabla u\right|^2 dx,$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int \frac{1}{u^{\kappa}}dx &= -\kappa(\kappa+1)\,a_1\int \frac{1}{u^{\kappa+2}}\left|\nabla u\right|^2 dx + \kappa\mu_1\int \frac{1}{u^{\kappa}}dx \\ &\quad -\kappa\int \frac{u^{p_1-\kappa-1}}{v^{q_1}(w^{r_1}+\hat{c})}dx - \sigma\kappa\int \frac{1}{u^{\kappa+1}}dx.\end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de Young sur le terme $\kappa\mu_1\int\frac{1}{u^{\kappa}}dx$, on aura

$$\kappa\mu_1\int \frac{1}{u^{\kappa}}dx \leq \kappa\sigma\int \frac{1}{u^{\kappa+1}}dx + \kappa\sigma^{-\kappa}\mu_1^{\kappa+1}\left|\Omega\right|,$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int \frac{1}{u^{\kappa}}dx &\leq -\kappa(\kappa+1)\,a_1\int \frac{1}{u^{\kappa+2}}\left|\nabla u\right|^2 dx + \kappa\sigma\int \frac{1}{u^{\kappa+1}}dx + \kappa\sigma^{-\kappa}\mu_1^{\kappa+1}\left|\Omega\right| \\ &\quad -\kappa\int \frac{u^{p_1-\kappa-1}}{v^{q_1}(w^{r_1}+\hat{c})}dx - \sigma\kappa\int \frac{1}{u^{\kappa+1}}dx\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\int \frac{1}{u^{\kappa}}dx \leq \kappa\sigma^{-\kappa}\mu_1^{\kappa+1}\left|\Omega\right|.$$

Intégrant de 0 à t , on trouve

$$\int_0^t\left(\frac{d}{dt}\int \frac{1}{u^{\kappa}}dx\right)d\tau \leq \int_0^t \kappa\sigma^{-\kappa}\mu_1^{\kappa+1}\left|\Omega\right|d\tau.$$

Donc

$$\int \frac{1}{u^{\kappa}}dx \leq 2\max\left(\int \frac{1}{\xi_1^{\kappa}}dx\ ,\ \kappa\sigma^{-\kappa}\mu_1^{\kappa+1}\left|\Omega\right|t\right).$$

En élevant les deux membres à la puissance $\frac{1}{\kappa}$ et en faisant tendre $\kappa \longrightarrow +\infty$ on aura

$$\left\|\frac{1}{u}\right\|_{\infty} \leq \max\left(\left\|\frac{1}{\xi_1}\right\|_{\infty}\ ,\ \frac{\mu_1}{\sigma}\right) = A_1.$$

2) On a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\frac{1}{(vw)^k}d\Omega &= \int_{\Omega}\frac{-\nabla (vw)^k}{(vw)^{2k}}d\Omega \\ &= -ka_2\int_{\Omega}\frac{1}{v^{k+1}w^k}\Delta v + k\mu_2\int_{\Omega}\frac{1}{v^k w^k} - k\int_{\Omega}\frac{u^{p_2}}{v^{q_2+k+1}w^{r_2+k}}d\Omega \\ &\quad -ka_3\int_{\Omega}\frac{1}{v^k w^{k+1}}\Delta w + k\mu_3\int_{\Omega}\frac{1}{v^k w^k} - k\int_{\Omega}\frac{u^{p_3}}{v^{q_3+k}w^{r_3+k+1}}d\Omega.\end{aligned}$$

Appliquant la formule de Green pour les termes $\int_{\Omega}\frac{1}{v^{k+1}w^k}\Delta v dx$ et $\int_{\Omega}\frac{1}{v^k w^{k+1}}\Delta w dx$;

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\frac{1}{v^{k+1}w^k}\Delta v dx &= -\int_{\Omega}\nabla\left(\frac{1}{v^{k+1}w^k}\right)\nabla v dx \\ &= (k+1)\int_{\Omega}\frac{1}{v^{k+2}w^k}(\nabla v)^2 dx + k\int_{\Omega}\frac{1}{v^{k+1}w^{k+1}}\nabla v\nabla w dx.\end{aligned}$$

De la même façon on trouve

$$\int_{\Omega}\frac{1}{w^{k+1}v^k}\Delta w dx = (k+1)\int_{\Omega}\frac{1}{w^{k+2}v^k}(\nabla w)^2 dx + k\int_{\Omega}\frac{1}{w^{k+1}v^{k+1}}\nabla v\nabla w dx.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\frac{1}{(vw)^k}d\Omega &= -ka_2\left((k+1)\int_{\Omega}\frac{1}{v^{k+2}w^k}(\nabla v)^2 dx + k\int_{\Omega}\frac{1}{v^{k+1}w^{k+1}}\nabla v\nabla w dx\right) \\ &\quad -ka_3\left((k+1)\int_{\Omega}\frac{1}{w^{k+2}v^k}(\nabla w)^2 dx + k\int_{\Omega}\frac{1}{w^{k+1}v^{k+1}}\nabla v\nabla w dx\right) \\ &\quad +k(\mu_2+\mu_3)\int_{\Omega}\frac{1}{v^k w^k} - k\int_{\Omega}\frac{u^{p_2}}{v^{q_2+k+1}w^{r_2+k}}d\Omega - k\int_{\Omega}\frac{u^{p_3}}{v^{q_3+k}w^{r_3+k+1}}d\Omega\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -k(k+1)a_2\int_\Omega \frac{1}{v^{k+2}w^k}(\nabla v)^2\,dx - k^2a_2\int_\Omega \frac{1}{v^{k+1}w^{k+1}}\nabla v\nabla w dx \\
&\quad -k(k+1)a_3\int_\Omega \frac{1}{w^{k+2}v^k}(\nabla w)^2\,dx - k^2a_3\int_\Omega \frac{1}{w^{k+1}v^{k+1}}\nabla v\nabla w dx \\
&\quad +k(\mu_2+\mu_3)\int_\Omega \frac{1}{v^kw^k} - k\int_\Omega \frac{u^{p_2}}{v^{q_2+k+1}w^{r_2+k}}d\Omega - k\int_\Omega \frac{u^{p_3}}{v^{q_3+k}w^{r_3+k+1}}d\Omega \\
&= I+J
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
I &= -k(k+1)a_2\int_\Omega \frac{1}{v^{k+2}w^k}(\nabla v)^2\,dx - k^2a_2\int_\Omega \frac{1}{v^{k+1}w^{k+1}}\nabla v\nabla w dx \\
&\quad -k(k+1)a_3\int_\Omega \frac{1}{w^{k+2}v^k}(\nabla w)^2\,dx - k^2a_3\int_\Omega \frac{1}{w^{k+1}v^{k+1}}\nabla v\nabla w dx,
\end{aligned}
$$

$$
J = k(\mu_2+\mu_3)\int_\Omega \frac{1}{v^kw^k} - k\int_\Omega \frac{u^{p_2}}{v^{q_2+k+1}w^{r_2+k}}d\Omega - k\int_\Omega \frac{u^{p_3}}{v^{q_3+k}w^{r_3+k+1}}d\Omega.
$$

Pour I, on a

$$
\begin{aligned}
I &= \int_\Omega \begin{pmatrix} -k(k+1)a_2\frac{1}{v^{k+2}w^k}(\nabla v)^2 - k^2a_2\frac{1}{v^{k+1}w^{k+1}}\nabla v\nabla w \\ -k(k+1)a_3\frac{1}{w^{k+2}v^k}(\nabla w)^2 - k^2a_3\frac{1}{w^{k+1}v^{k+1}}\nabla v\nabla w \end{pmatrix} dx \\
&= \int_\Omega \begin{pmatrix} -k(k+1)a_2w^2(\nabla v)^2 - k^2a_2vw\nabla v\nabla w \\ -k(k+1)a_3v^2(\nabla w)^2 - k^2a_3vw\nabla v\nabla w \end{pmatrix} \frac{1}{v^{k+2}w^{k+2}}dx \\
&= -\int_\Omega Q\frac{1}{v^{k+2}w^{k+2}}dx
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
Q &= k(k+1)a_2w^2(\nabla v)^2 + k^2a_2vw\nabla(v)\nabla(w) \\
&\quad +k(k+1)a_3v^2(\nabla w)^2 + k^2a_3vw\nabla(v)\nabla(w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= k(k+1)a_2[w|\nabla v|]^2 + k^2a_2[w\nabla(v)][v\nabla(w)] \\
&\quad +k^2a_3[w\nabla(v)][v\nabla(w)] + k(k+1)a_3[v|\nabla w|]^2
\end{aligned}
$$

Q est une forme quadratique par rapport à $w\left|\nabla v\right|$ et $v\left|\nabla w\right|$, qui s'écrit sous la forme matricielle:

$$Q=\begin{pmatrix} w\nabla\left(v\right) \\ v\nabla\left(w\right)\end{pmatrix}^{T}\left(\begin{pmatrix} k\left(k+1\right)a_2 & k^2a_2 \\ k^2a_3 & k\left(k+1\right)a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w\nabla\left(v\right) \\ v\nabla\left(w\right)\end{pmatrix}\right).$$

Q est définie positive si, et seulement si, tous les déterminants principaux successifs Δ_1 et Δ_2 de sa matrice des coefficients, sont positifs.

Nous avons

$$\Delta_1=k\left(k+1\right)a_2>0,$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} k\left(k+1\right)a_2 & k^2a_2 \\ k^2a_3 & k\left(k+1\right)a_3\end{vmatrix} \\ &= k^2\left(2k+1\right)a_2a_3>0,\end{aligned}$$

donc Q est définie positive.

Alors

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\left(vw\right)^k}d\Omega\leq J=k\left(\mu_2+\mu_3\right)\int\limits_{\Omega}\frac{1}{v^kw^k}-k\int\limits_{\Omega}\frac{u^{p_2}}{v^{q_2+k+1}w^{r_2+k}}d\Omega-k\int\limits_{\Omega}\frac{u^{p_3}}{v^{q_3+k}w^{r_3+k+1}}d\Omega.$$

Utilisant le Lemme 4.1.2 pour le terme $k\left(\mu_2+\mu_3\right)\int\limits_{\Omega}\frac{1}{v^kw^k}$, nous avons

$$\int_{\Omega}\frac{u^p}{v^qw^r}dx\leq c\int_{\Omega}\frac{u^m}{v^nw^\rho}dx+c^{-(p-\lambda)\backslash(m-p)}\int_{\Omega}\frac{u^\lambda}{v^\eta w^\theta}dx$$

d'après le principe de maximum il existe C_0 qui dépend de $\left\|\xi_1\right\|_\infty$, $\left\|\xi_2\right\|_\infty$ et de $\left\|\xi_3\right\|_\infty$ telle que $v,w\geq C_0>0$, d'où

$$\int_{\Omega}\frac{u^p}{v^qw^r}dx\leq c\int_{\Omega}\frac{u^m}{v^nw^\rho}dx+c^{-(p-\lambda)\backslash(m-p)}\int_{\Omega}\frac{u^\lambda}{C_0^{\eta+\theta}}dx.$$

On a ainsi

$$\int\limits_{\Omega}\frac{1}{v^kw^k}\leq\frac{1}{\mu_2+\mu_3}\int_{\Omega}\frac{u^{p_2}}{v^{q_2+k+1}w^{r_2+k}}dx+\left(\frac{1}{\mu_2+\mu_3}\right)^{-\frac{2k}{q_2+r_2+1}}\int_{\Omega}\frac{1}{u^{2kp_2/q_2+r_2+1}}dx$$

avec

$$\begin{aligned} p &= 0,\ q=k,\ r=k,\ c=\frac{1}{\mu_2+\mu_3},\ m=p_2,\ n=q_2+k+1,\ \rho=r_2+k \\ \lambda &= -2k\frac{p_2}{q_2+r_2+1} \\ \eta &= \frac{q\,(m-\lambda)-n\,(p-\lambda)}{m-p}=k+\lambda\frac{q_2+1}{p_2} \\ \theta &= \frac{r\,(m-\lambda)-\rho\,(p-\lambda)}{m-p}=k+\lambda\frac{r_2}{p_2} \end{aligned}$$

alors

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{(vw)^k}d\Omega \le k\left(\frac{1}{\mu_2+\mu_3}\right)^{-\frac{2k}{q_2+r_2+1}-1}\int_\Omega \frac{1}{u^{2kp_2/q_2+r_2+1}}dx$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{(vw)^k}d\Omega \le k\left(\frac{1}{\mu_2+\mu_3}\right)^{-\frac{2k}{q_2+r_2+1}-1}|\Omega|\left\|\frac{1}{u}\right\|_\infty^{2kp_2/q_2+r_2+1}$$

Intégrant de 0 à t, élevant à la puissance $\frac{1}{k}$ et faisant tendre k vers $+\infty$, on trouve

$$\left\|\frac{1}{vw}\right\|_\infty \le \max\left(\left\|\frac{1}{\xi_2\xi_3}\right\|_\infty,\ \left(\frac{1}{\mu_2+\mu_3}\right)^{-\frac{2}{q_2+r_2+1}} A_1^{2p_2/q_2+r_2+1}\right)=A_2.$$

■

Lemme 4.1.4 *(voir [36])*

Soit $L^+(0,T)$ l'ensemble de toutes fonctions intégrables $f(t)\ge 0$ dans $(0,T)$ telles que la quantité

$$K[f]=\sup_{0<t<T}\int_0^t e^{-\mu(\tau-T)}f(\tau)\,d\tau$$

est finie.

Supposons $0\le\theta_j\le 1$ et $\gamma_j\in L^+(0,T)$ $(j=1,...,J)$. Soit $W=W(t)$ une fonction positive dans $[0,T)$ satisfaisant l'inégalité différentielle:

$$\frac{dW}{dt}\le -\mu W(t)+\sum_{j=1}^{J}\gamma_j(t)\,W^{\theta_j}(t),\qquad 0\le t<T.$$

Alors

$$W(t)\le\kappa,\qquad\qquad 0\le t<T,$$

où κ est la racine positive de l'équation algébrique en x:

$$x-\sum_{j=1}^{J}K\left[\gamma_j\right]x^{\theta_j}=W\left(0\right)$$

Théorème 4.1.1 *Soit la fonctionnelle*

$$L(t)=\int_{\Omega}\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}dx.$$

associée au système (4.1.2).
Sous la condition (4.1.5) , la fonctionnelle $L(t)$ est uniformément bornée dans l'intervalle $[0,T^*]$, $T^*<T_{\max}$, où $T_{\max}\left(\|u_0\|_\infty,\|v_0\|_\infty,\|w_0\|_\infty\right)$ définit le temps éventuel d'explosion.

Corollaire 4.1.1 *Sous les hypothèses du Théorème 4.1.1, la solution du problème (4.1.2) est globale et uniformément bornée dans $\Omega\times\left(0,\infty\right)$ pour des conditions initiales positives dans $C\left(\overline{\Omega}\right)$.*

Preuve de théorème 4.1.1.

Dérivant $L(t)$ par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(t) &= \int_{\Omega}\frac{d}{dt}\left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)d\Omega\\
&= \int_{\Omega}\frac{1}{v^{2\beta}w^{2\gamma}}\left(\alpha u^{\alpha-1}v^{\beta}w^{\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}-\beta u^{\alpha}v^{\beta-1}w^{\gamma}\frac{\partial v}{\partial t}-\gamma u^{\alpha}v^{\beta}w^{\gamma-1}\frac{\partial w}{\partial t}\right)d\Omega\\
&= \int_{\Omega}\left(\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\beta\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\gamma\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma+1}}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right)d\Omega
\end{aligned}$$

$$=\int_{\Omega}\left(\begin{array}{c}
\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\left(a_1\Delta u-\mu_1u+\frac{u^{p_1}}{v^{q_1}\left(w^{r_1}+\hat{c}\right)}+\sigma\right)\\
-\beta\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\left(a_2\Delta v-\mu_2v+\frac{u^{p_2}}{v^{q_2}w^{r_2}}\right)\\
-\beta\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\left(a_2\Delta v-\mu_2v+\frac{u^{p_2}}{v^{q_2}w^{r_2}}\right)\\
-\gamma\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma+1}}\left(a_3\Delta w-\mu_3w+\frac{u^{p_3}}{v^{q_3}w^{r_3}}\right)
\end{array}\right)d\Omega$$

donc

$$\frac{d}{dt}L(t) = \int_\Omega \begin{pmatrix} a_1\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma}\Delta u - \mu_1\alpha\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} + \alpha\frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta}w^\gamma(w^{r_1}+\hat{c})} + \sigma\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma} \\ -a_2\beta\frac{u^\alpha}{v^{\beta+1}w^\gamma}\Delta v + \mu_2\beta\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} - \beta\frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}} \\ -a_3\gamma\frac{u^\alpha}{v^\beta w^{\gamma+1}}\Delta w + \mu_3\gamma\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} - \gamma\frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta}w^{r_3+\gamma+1}} \end{pmatrix} d\Omega$$

$$= \int_\Omega \begin{pmatrix} a_1\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma}\Delta u - a_2\beta\frac{u^\alpha}{v^{\beta+1}w^\gamma}\Delta v - a_3\gamma\frac{u^\alpha}{v^\beta w^{\gamma+1}}\Delta w \\ -\mu_1\alpha\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} + \mu_2\beta\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} + \mu_3\gamma\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \\ +\alpha\frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta}w^\gamma(w^{r_1}+\hat{c})} - \beta\frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}} - \gamma\frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta}w^{r_3+\gamma+1}} + \sigma\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma} \end{pmatrix} d\Omega$$

$$= I + J$$

où

$$I = a_1\alpha\int_\Omega \frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma}\Delta u d\Omega - a_2\beta\int_\Omega \frac{u^\alpha}{v^{\beta+1}w^\gamma}\Delta v d\Omega - a_3\gamma\int_\Omega \frac{u^\alpha}{v^\beta w^{\gamma+1}}\Delta w d\Omega,$$

$$J = -\mu_1\alpha\int_\Omega \frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}d\Omega + \mu_2\beta\int_\Omega \frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}d\Omega + \mu_3\gamma\int_\Omega \frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}d\Omega$$
$$+\alpha\int_\Omega \frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta}w^\gamma(w^{r_1}+\hat{c})}d\Omega - \beta\int_\Omega \frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}}d\Omega - \gamma\int_\Omega \frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta}w^{r_3+\gamma+1}}d\Omega + \sigma\alpha\int_\Omega \frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma}d\Omega.$$

Alors

$$I = a_1\alpha\int_\Omega \frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma}\Delta u d\Omega - a_2\beta\int_\Omega \frac{u^\alpha}{v^{\beta+1}w^\gamma}\Delta v d\Omega - a_3\gamma\int_\Omega \frac{u^\alpha}{v^\beta w^{\gamma+1}}\Delta w d\Omega,$$

$$J = (-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma)\, L(t)$$
$$+\alpha\int_\Omega \frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta}w^\gamma(w^{r_1}+\hat{c})}d\Omega - \beta\int_\Omega \frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}}d\Omega - \gamma\int_\Omega \frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta}w^{r_3+\gamma+1}}d\Omega + \sigma\alpha\int_\Omega \frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma}d\Omega.$$

En appliquant la formule de Green, tenant compte des conditions aux bords de Neumann, on aura

$$\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\Delta u d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla\left(\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)\nabla(u)\, d\Omega$$

$$= -\int_{\Omega} \nabla(u)\frac{1}{v^{2\beta}w^{2\gamma}}\begin{pmatrix} (\alpha-1)\,u^{\alpha-2}v^{\beta}w^{\gamma}\nabla(u) \\ -\left(\beta v^{\beta-1}w^{\gamma}\nabla(v)+\gamma v^{\beta}w^{\gamma-1}\nabla(w)\right)(u^{\alpha-1}) \end{pmatrix} d\Omega$$

$$= -\int_{\Omega} \begin{pmatrix} (\alpha-1)\frac{u^{\alpha-2}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\left|\nabla u\right|^{2} - \beta\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\nabla(u)\nabla(v) \\ -\gamma\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma+1}}\nabla(u)\nabla(w) \end{pmatrix} d\Omega$$

donc

$$\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\Delta u d\Omega = -\int_{\Omega} \begin{pmatrix} (\alpha-1)\frac{u^{\alpha-2}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\left|\nabla u\right|^{2} - \beta\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\nabla(u)\nabla(v) \\ -\gamma\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma+1}}\nabla(u)\nabla(w) \end{pmatrix} d\Omega.$$

$$\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\Delta v d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla(v)\nabla\left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\right) d\Omega$$

$$= -\int_{\Omega} \nabla(v)\frac{1}{v^{2\beta+2}w^{2\gamma}}\left(\alpha u^{\alpha-1}v^{\beta+1}w^{\gamma}\nabla(u) - \begin{pmatrix} (\beta+1)\,v^{\beta}w^{\gamma}\nabla(v) \\ +\gamma v^{\beta+1}w^{\gamma-1}\nabla(w) \end{pmatrix} u^{\alpha}\right) d\Omega$$

$$= -\int_{\Omega} \begin{pmatrix} \alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\nabla(u)\nabla(v) - (\beta+1)\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+2}w^{\gamma}}\left|\nabla v\right|^{2} \\ -\gamma\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma+1}}\nabla(v)\nabla(w) \end{pmatrix} d\Omega.$$

Ainsi

$$\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\Delta v d\Omega = -\int_{\Omega} \begin{pmatrix} \alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta+1}w^{\gamma}}\nabla(u)\nabla(v) - (\beta+1)\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+2}w^{\gamma}}\left|\nabla v\right|^{2} \\ -\gamma\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1}w^{\gamma+1}}\nabla(v)\nabla(w) \end{pmatrix} d\Omega.$$

$$\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma+1}}\Delta w d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla(w)\nabla\left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma+1}}\right) d\Omega$$

$$= -\int_{\Omega} \nabla(w) \frac{1}{v^{2\beta} w^{2\gamma+2}} \begin{pmatrix} \alpha u^{\alpha-1} v^{\beta} w^{\gamma+1} \nabla(u) \\ -\left(\nabla\left(v^{\beta}\right) w^{\gamma+1} + \nabla\left(w^{\gamma+1}\right) v^{\beta}\right) u^{\alpha} \end{pmatrix} d\Omega$$

$$= -\int_{\Omega} \begin{pmatrix} \alpha \frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta} w^{\gamma+1}} \nabla(u) \nabla(w) - \beta \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1} w^{\gamma+1}} \nabla(v) \nabla(w) \\ -(\gamma+1) \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma+2}} |\nabla w|^2 \end{pmatrix} d\Omega.$$

Par suite,

$$\int_{\Omega} \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma+1}} \Delta w d\Omega = -\int_{\Omega} \begin{pmatrix} \alpha \frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta} w^{\gamma+1}} \nabla(u) \nabla(w) - \beta \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1} w^{\gamma+1}} \nabla(v) \nabla(w) \\ -(\gamma+1) \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma+2}} |\nabla w|^2 \end{pmatrix} d\Omega.$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} I &= -a_1 \alpha \int_{\Omega} \left((\alpha-1) \frac{u^{\alpha-2}}{v^{\beta} w^{\gamma}} |\nabla u|^2 - \beta \frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta+1} w^{\gamma}} \nabla(u) \nabla(v) - \gamma \frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta} w^{\gamma+1}} \nabla(u) \nabla(w) \right) d\Omega \\ &\quad + a_2 \beta \int_{\Omega} \left(\alpha \frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta+1} w^{\gamma}} \nabla(u) \nabla(v) - (\beta+1) \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+2} w^{\gamma}} |\nabla v|^2 - \gamma \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1} w^{\gamma+1}} \nabla(v) \nabla(w) \right) d\Omega \\ &\quad + a_3 \gamma \int_{\Omega} \left(\alpha \frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta} w^{\gamma+1}} \nabla(u) \nabla(w) - \beta \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1} w^{\gamma+1}} \nabla(v) \nabla(w) - (\gamma+1) \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma+2}} |\nabla w|^2 \right) d\Omega \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} -a_1 \alpha (\alpha-1) \frac{u^{\alpha-2}}{v^{\beta} w^{\gamma}} |\nabla u|^2 + \alpha\beta (a_1 + a_2) \frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta+1} w^{\gamma}} \nabla(u) \nabla(v) \\ +\alpha\gamma (a_1 + a_3) \frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta} w^{\gamma+1}} \nabla(u) \nabla(w) \\ -a_2 \beta (\beta+1) \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+2} w^{\gamma}} |\nabla v|^2 - \gamma\beta (a_2 + a_3) \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1} w^{\gamma+1}} \nabla(v) \nabla(w) \\ -a_3 \gamma (\gamma+1) \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma+2}} |\nabla w|^2 \end{pmatrix} d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} -a_1 \alpha (\alpha-1) v^2 w^2 |\nabla u|^2 + \alpha\beta (a_1 + a_2) v u w^2 \nabla(u) \nabla(v) \\ +\alpha\gamma (a_1 + a_3) v^2 u w \nabla(u) \nabla(w) - a_2 \beta (\beta+1) u^2 w^2 |\nabla v|^2 \\ -\gamma\beta (a_2 + a_3) v u^2 w \nabla(v) \nabla(w) \\ -a_3 \gamma (\gamma+1) u^2 v^2 |\nabla w|^2 \end{pmatrix} \frac{u^{\alpha-2}}{v^{\beta+2} w^{\gamma+2}} d\Omega$$

$$= \int\limits_{\Omega} \begin{pmatrix} -a_1\alpha(\alpha-1)[vw|\nabla u|]^2 + \alpha\beta(a_1+a_2)[vw\nabla(u)][uw\nabla(v)] \\ +\alpha\gamma(a_1+a_3)[vw\nabla(u)][uv\nabla(w)] - a_2\beta(\beta+1)[uw|\nabla v|]^2 \\ -\gamma\beta(a_2+a_3)[uw\nabla(v)][uv\nabla(w)] \\ -a_3\gamma(\gamma+1)[uv|\nabla w|]^2 \end{pmatrix} \frac{u^{\alpha-2}}{v^{\beta+2}w^{\gamma+2}} d\Omega,$$

$$= -\int\limits_{\Omega} Q \frac{u^{\alpha-2}}{v^{\beta+2}w^{\gamma+2}} d\Omega,$$

où

$$Q = \begin{pmatrix} a_1\alpha(\alpha-1)[vw|\nabla u|]^2 - \alpha\beta(a_1+a_2)[vw\nabla(u)][uw\nabla(v)] \\ -\alpha\gamma(a_1+a_3)[vw\nabla(u)][uv\nabla(w)] + a_2\beta(\beta+1)[uw|\nabla v|]^2 \\ +\gamma\beta(a_2+a_3)[uw\nabla(v)][uv\nabla(w)] \\ +a_3\gamma(\gamma+1)[uv|\nabla w|]^2 \end{pmatrix}$$

Q est une forme quadratique par rapport à: $vw|\nabla u|$, $uw|\nabla v|$ et $uv|\nabla w|$, qui s'écrit sous la forme matricielle:

$$Q = \begin{pmatrix} vw\nabla(u) \\ uw\nabla(v) \\ uv\nabla(w) \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & a_2\beta(\beta+1) & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} \\ -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} & a_3\gamma(\gamma+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vw\nabla(u) \\ uw\nabla(v) \\ uv\nabla(w) \end{pmatrix} \right)$$

Q est définie positive *si, et seulement si, tous les déterminants principaux successifs* Δ_1, Δ_2 et Δ_3 *de sa matrice des coefficients, sont positifs,*
où

$$\Delta_1 = a_1\alpha(\alpha-1),$$

$\Delta_1 > 0$ d'après (4.1.6) .

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & a_2\beta(\beta+1) \end{vmatrix} \\ &= \alpha^2\beta^2 a_1 a_2 \left(\frac{(\alpha-1)}{\alpha}\frac{(\beta+1)}{\beta} - A_{12}^2 \right), \end{aligned}$$

d'après (4.1.7) nous avons $\Delta_2 > 0$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & a_2\beta(\beta+1) & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} \\ -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} & a_3\gamma(\gamma+1) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_1\alpha(\alpha-1)} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & a_2\beta(\beta+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} \\ -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} \\ -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} & a_3\gamma(\gamma+1) \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\alpha}{(\alpha-1)}\alpha^2\beta^2\gamma^2 a_1a_2a_3 \begin{pmatrix} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{\beta+1}{\beta} - A_{12}^2\right)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{\gamma+1}{\gamma} - A_{13}^2\right) \\ -\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}A_{23} - A_{12}A_{13}\right)^2 \end{pmatrix},$$

et par (4.1.8) et (4.1.6), on obtient que $\Delta_3 > 0$.

Estimation de J

$$\begin{aligned} J &= (-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma)\,L(t) \\ &\quad +\alpha\int_\Omega \frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta}w^{\gamma}(w^{r_1}+\hat{c})}d\Omega - \beta\int_\Omega \frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}}d\Omega - \gamma\int_\Omega \frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta}w^{r_3+\gamma+1}}d\Omega + \sigma\alpha\int_\Omega \frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma}d\Omega \end{aligned}$$

Le principe de maximum nous fournit l'éxistence de C_0 qui dépend de $\|\xi_1\|_\infty$, $\|\xi_2\|_\infty$ et de $\|\xi_3\|_\infty$ telle que $v, w \geq C_0 > 0$, donc on a

$$\frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma} = \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \left(\frac{1}{w}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}} \leq \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}}$$

ou encore

$$\frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma} \leq C_3\left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \qquad \text{où} \qquad C_3 = \left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}}.$$

On a

$$\begin{aligned} J &= (-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma) L(t) \\ &+\alpha \int_\Omega \frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta} w^\gamma (w^{r_1} + \hat{c})} d\Omega - \beta \int_\Omega \frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1} w^{r_2+\gamma}} d\Omega \\ &-\gamma \int_\Omega \frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta} w^{r_3+\gamma+1}} d\Omega + \sigma\alpha \int_\Omega \frac{u^{\alpha-1}}{v^\beta w^\gamma} d\Omega. \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 4.1.1 on obtient

$$\alpha \frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta} w^\gamma (w^{r_1} + \hat{c})} \leq \alpha \frac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta} w^{\gamma+r_1}} \leq \beta \frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1} w^{r_2+\gamma}} + C \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \right)^\theta,$$

donc

$$\begin{aligned} J &\leq (-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma) L(t) + \beta \int_\Omega \frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1} w^{r_2+\gamma}} d\Omega + \int_\Omega C \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \right)^\theta d\Omega \\ &+\alpha\sigma \int_\Omega C_3 \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} d\Omega - \beta \int_\Omega \frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1} w^{r_2+\gamma}} d\Omega - \gamma \int_\Omega \frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta} w^{r_3+\gamma+1}} d\Omega, \end{aligned}$$

il s'ensuit

$$J \leq (-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma) L(t) + \int_\Omega C \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \right)^\theta d\Omega + \alpha\sigma \int_\Omega C_3 \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} d\Omega.$$

Compte tenu de l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_\Omega C \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \right)^\theta d\Omega \leq \left(\int_\Omega \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \right) d\Omega \right)^\theta \left(\int_\Omega (C)^{\frac{1}{1-\theta}} d\Omega \right)^{1-\theta},$$

donc

$$\int_\Omega C \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \right)^\theta d\Omega \leq C_4 (L(t))^\theta, \qquad \text{où } C_4 = C |\Omega|^{1-\theta}.$$

On a

$$\int_\Omega C_3 \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} d\Omega \leq \left(\int_\Omega \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \right) d\Omega \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\int_\Omega (C_3)^\alpha d\Omega \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

alors

$$\int_{\Omega} C_3 \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma} \right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}} d\Omega \leq C_5 \left(L(t)\right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}}, \qquad \text{où } C_5 = C_3 \left|\Omega\right|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

On obtient ainsi

$$J \leq \left(-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma\right) L(t) + C_4 \left(L(t)\right)^\theta + \alpha\sigma C_5 \left(L(t)\right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}},$$

ce qui donne

$$J \leq \left(-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma\right) L(t) + C_6 \left(\left(L(t)\right)^\theta + \alpha\sigma \left(L(t)\right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}} \right).$$

Sous les conditions (4.1.6), (4.1.7) et (4.1.8) on aura:

$$L'(t) \leq \left(-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma\right) L(t) + C_6 \left(\left(L(t)\right)^\theta + \alpha\sigma \left(L(t)\right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}} \right),$$

et comme $-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma < 0$ d'après (4.1.6), il en résulte

$$L'(t) \leq C_6 L^\theta(t) + C_6\alpha\sigma L^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t). \tag{4.1.17}$$

En appliquant le Lemme 4.1.4 sur (4.1.17) on trouve que $L(t)$ est bornée dans $(0, T_{\max})$; i.e. $L(t) \leq \gamma_3$, où γ_3 dépend de la norme-L^∞ de ξ_1, ξ_2 et de ξ_3. ■

Preuve du Corollaire 4.1.1.

Supposons $Au = d\Delta u - \mu_1 u$, alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe $\{e^{tA} \left| 0 \leq t < \infty \right.\}$ dans $L^\alpha(\Omega)$, de domaine

$$D(A) = \left\{ u \left| u \in W^{2,\alpha}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \right. \right\},$$

où $\alpha = N(N+1) / 2$ et N est la dimension de $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs, il existe des constantes $\varsigma > 1$ et $\delta > 0$, telles que

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} e^{tA} \right\| \leq \varsigma \left(1 + t^{-\frac{1}{2}}\right) e^{-\delta t}, \qquad t > 0, \tag{4.1.18}$$

où $\|.\|$ dénote la norme de $L^\alpha(\Omega)$. Ainsi la première équation du système (4.1.2) avec $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ et $u(x, 0) = \xi_1(x)$, est équivalente à l'équation intégrale

$$u(t) = e^{tA}\xi_1 + \int_0^t e^{(t-s)A} \left[\frac{u^{p_1}(s)}{v^{q_1}(s)\left(w^{r_1}(s) + c\right)} + \sigma \right] ds.$$

Utilisant le Théorème 1.6.1 cité dans [18] et (4.1.18), on obtient

$$\begin{aligned}
\max_{\overline{\Omega}} u(.,t) &\leq \left\| A^{\frac{1}{2}} u(t) \right\| \\
&\leq \varsigma \left(1 + t^{-\frac{1}{2}}\right) e^{-\delta t} \|\xi_1\| \qquad (4.1.19)\\
&+ \int_0^t \varsigma \left(1 + (t-s)^{-\frac{1}{2}}\right) e^{-\delta(t-s)}. \left\| \frac{u^{p_1}(s)}{v^{q_1}(s) w^{r_1}(s)} + \sigma \right\| ds.
\end{aligned}$$

Supposant $m > \alpha p$ et $mq > pn$ et $rm > kp$ et appliquant le Lemme 4.1.2, on trouve

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{u^{p_1}}{v^{q_1} w^{r_1}} \right\|^{\alpha} &= \int_{\Omega} \frac{u^{p_1 \alpha}}{v^{q_1 \alpha} w^{r_1 \alpha}} d\Omega \\
&\leq c \int_{\Omega} \frac{u^m}{v^n w^k} dx + c^{-\frac{(p_1\alpha - \lambda)}{(m - p_1 \alpha)}} \int_{\Omega} \frac{u^{\lambda}}{v^{\eta} w^{\theta}} dx \\
&\leq \int_{\Omega} \frac{u^m}{v^n w^k} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{v^{\eta} w^{\theta}} dx
\end{aligned}$$

où

$$\eta = \frac{\alpha q_1 m - \alpha n p_1}{m - \alpha p_1} \quad , \quad \theta = \frac{\alpha r_1 m - \alpha k p_1}{m - \alpha p_1}, \quad \lambda = 0.$$

Grâce au Théorème 4.1.1 il existe γ_4 qui dépend de la norme-L^{∞} de ξ_1, ξ_2 et de ξ_3,telle que

$$\int_{\Omega} \frac{u^m}{v^n w^k} dx \leq \gamma_4.$$

D'après (4.1.16) on a

$$\int_{\Omega} \frac{1}{v^{\eta} w^{\theta}} dx \leq \left\| \frac{1}{vw} \right\|_{\infty}^{\vartheta} \leq A_2^{\vartheta} \quad \text{tq } \vartheta \text{ est constante.}$$

Alors

$$\left\| \frac{u^{p_1}}{v^{q_1} w^{r_1}} \right\| \leq \left(\gamma_3 + A_2^{\vartheta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} =: A_4$$

donc

$$\max_{\overline{\Omega}} u(.,t) \leq \varsigma \left(1 + t^{-\frac{1}{2}}\right) e^{-\delta t} \|\xi_1\| + \varsigma e^{-\delta t} \int_0^t e^{\delta s}.A_4 ds + \varsigma e^{-\delta t} \int_0^t e^{\delta s}.\sigma ds \qquad (4.1.20)$$

Le Théorème 4.1.1, inégalité de Holder, (4.1.16) et (4.1.20) impliquent

$$\max u(.,t) \leq M \left(1 + t^{-\frac{1}{2}}\right). \qquad (4.1.21)$$

Il résulte de (4.1.21) et du principe du maximum que la solution est globale et uniformément bornée dans $\Omega \times (0, \infty)$. ■

4.1.2 Explosion en temps fini des solutions pour le système EDO associé

S'il existe un temps $t_{\max} < \infty$, tel que les solutions sont bien définies pour tout $0 < t < T_{\max}$, où

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} \|u(t,.) + v(t,.) + w(t,.)\|_{\infty} = \infty,$$

alors on dira que les solutions explosent en temps fini.

Supposons dans notre problème (4.1.2)-(4.1.4) que $\hat{c} = 0$.

Considérons d'abord le lemme suivant déduit du principe du maximum (voir [43] page 297):

Lemme 4.1.5 *Soit* $(u(t,.), v(t,\cdot), w(t,\cdot))$ *la solution de (4.1.2)-(4.1.4). Alors pour tout* (t,x) *dans* $(0, T_{\max}) \times \Omega$, *on a*

$$\begin{aligned} u(t,x) &\geq e^{-\mu_1 t} \min(\xi_1(x)) > 0, \\ v(t,x) &\geq e^{-\mu_2 t} \min(\xi_2(x)) > 0, \\ w(t,x) &\geq e^{-\mu_3 t} \min(\xi_3(x)) > 0. \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

Théorème 4.1.2 *Supposons*

$$\frac{p_1 - 1}{\max(p_2, p_3)} > \min\left[\frac{q_1 r_1}{\min(q_2, q_3, r_2, r_3) - \max(q_1, r_1) + q_1 r_1}, 1\right],$$

alors il existe un espace-indépendant des conditions initiales u_0, v_0, w_0, *tel que la solution* $(u,v,w) = (u(t), v(t), w(t))$ *du problème (4.1.2)-(4.1.4) explose en temps fini.*

Preuve. Considérons l'espace-indépendant des solutions de (4.1.2)-(4.1.4), i.e. les solutions de système EDO associé sans diffusion. Pour des conditions homogènes spatiales $u_0, v_0, w_0 \geq 1$, supposons pour contradiction que $T_{max}(u_0, v_0, w_0) > 1$. Dans ce qui suit, toutes les constantes positives C_7, C_8,... sont indépendantes de u_0, v_0, w_0. Pour α, β, γ fixés non négatifs, soit $\lambda = \alpha\mu_1 - \beta\mu_2 - \gamma\mu_3$ et $L(t) = \dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma}}$.
Nous avons trouvés précedemment que

$$L'(t) = \begin{pmatrix} a_1 \alpha \dfrac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta} w^{\gamma}} \Delta u - a_2 \beta \dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta+1} w^{\gamma}} \Delta v - a_3 \gamma \dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma+1}} \Delta w \\ -\mu_1 \alpha \dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma}} + \mu_2 \beta \dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma}} + \mu_3 \gamma \dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma}} \\ +\alpha \dfrac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta} w^{\gamma+r_1}} - \beta \dfrac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1} w^{r_2+\gamma}} - \gamma \dfrac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta} w^{r_3+\gamma+1}} + \sigma\alpha \dfrac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta} w^{\gamma}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\mu_1\alpha\dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}} + \mu_2\beta\dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}} + \mu_3\gamma\dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}} \\ +\alpha\dfrac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta}w^{\gamma+r_1}} - \beta\dfrac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}} - \gamma\dfrac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta}w^{r_3+\gamma+1}} + \sigma\alpha\dfrac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}} \end{pmatrix},$$

donc

$$L'(t) + \lambda L(t) = \begin{pmatrix} -\mu_1\alpha\dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}} + \mu_2\beta\dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}} + \mu_3\gamma\dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}} \\ +\alpha\dfrac{u^{p_1+\alpha-1}}{v^{q_1+\beta}w^{\gamma+r_1}} - \beta\dfrac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}} - \gamma\dfrac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta}w^{r_3+\gamma+1}} + \sigma\alpha\dfrac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}} \\ +\alpha\mu_1\dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}} - \beta\mu_2\dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}} - \gamma\mu_3\dfrac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}} \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\frac{u^{p_1-1+\alpha}}{v^{q_1+\beta}w^{r_1+\gamma}} - \beta\frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}} - \gamma\frac{u^{p_3+\alpha}}{v^{q_3+\beta}w^{r_3+\gamma+1}} + \sigma\alpha\frac{u^{\alpha-1}}{v^{\beta}w^{\gamma}}. \qquad (4.1.23)$$

Envisageons deux cas séparés:

<u>Cas 1</u>: $p_1 - 1 > \max(p_2, p_3)$. Appliquant (4.1.23) avec $\alpha = 1$, et prenant β, γ suffisamment grands , utilisant (4.1.22) , $\xi_2,\ \xi_3 \geq 1$ et l'inégalité de Young; nous obtenons pour tout $t \in [0,1]$

$$\frac{\alpha}{3}\frac{u^{p_1}}{v^{q_1+\beta}w^{r_1+\gamma}} = \frac{\alpha}{3}\left(\frac{u^{p_2+1}}{v^{q_2+1+\beta}w^{r_2+1+\gamma}}\right)^{p_1/p_2+1} v^k w^h \geq \beta\frac{u^{p_2+1}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}} - C_7$$

où $k = (q_2 + 1 + \beta)\frac{p_1}{p_2+1} - q_1 - \beta > 0$, $h = (r_2 + 1 + \gamma)\frac{p_1}{p_2+1} - r_1 - \gamma > 0$
$C_7 = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1-\frac{p_1}{p_1-(p_2+1)}} \beta^{\frac{p_1}{p_1-(p_2+1)}}$.

Avec les mêmes arguments nous obtenons

$$\frac{\alpha}{3}\frac{u^{p_1}}{v^{q_1+\beta}w^{r_1+\gamma}} \geq \gamma\frac{u^{p_3+1}}{w^{r_3+\gamma+1}v^{q_3+\beta}} - C_8$$

où $C_8 = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1-\frac{p_1}{p_1-(p_3+1)}} \gamma^{\frac{p_1}{p_1-(p_3+1)}}$.

D'autre part, en utilisant (4.1.22), on arrive à

$$\frac{\alpha}{3}\frac{u^{p_1}}{v^{q_1+\beta}w^{r_1+\gamma}} = \frac{\alpha}{3}\left(\frac{u}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)^{p_1} v^m w^n \geq C_9\left(\frac{u}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)^{p_1}$$

où $m = (p_1 - 1)\beta - q_1 > 0$, $n = (p_1 - 1)\gamma - r_1 > 0$. Donc on a

$$\alpha\frac{u^{p_1}}{v^{q_1+\beta}w^{r_1+\gamma}} \geq \beta\frac{u^{p_2+\alpha}}{v^{q_2+\beta+1}w^{r_2+\gamma}} + \gamma\frac{u^{p_3+\alpha}}{w^{r_3+\gamma+1}v^{q_3+\beta}} + C_9\left(\frac{u}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)^{p_1} - C_7 - C_8,$$

de (4.1.23), on obtient

$$L'(t) + \lambda L(t) \geq C_9\,(L(t))^{p_1} - C_7 - C_8,$$

ou encore

$$L'(t) + \lambda L(t) \geq C_9 \left(L(t)\right)^{p_1} - \widetilde{C},$$

où $\widetilde{C} = C_7 + C_8$.

Prenant $L(0)$ suffisamment grand, ce qui implique l'explosion de u avant $t = 1$, ce qui contredit avec $T_{max} > 1$

Cas 2:

$p_1 - 1 < \max(p_2, p_3)$ et $(p_1 - 1)\left[\min(q_2, q_3, r_2, r_3) - \max(q_1, r_1) + q_1 r_1\right] > q_1 r_1 \max(p_2, p_3)$.

Affirmons qu'il existe des constantes $C_{10}, C_{11} > 0$ telles que, si

$$\xi_1^{\max(p_2,p_3)-p_1+1} \geq C_{10} \xi_2^{\min(q_2,q_3)-q_1} \xi_3^{\min(r_2,r_3)-r_1}, \tag{4.1.24}$$

alors

$$u^{\max(p_2,p_3)-p_1+1} \geq C_{11} v^{\min(q_2,q_3)-q_1} w^{\min(r_2,r_3)-r_1}, \qquad 0 < t \leq 1. \tag{4.1.25}$$

Pour prouver cette affirmation, prenons $Z(t) = e^{\lambda t} L(t)$ et appliquons (4.1.23) avec $\alpha = \max(p_2, p_3) - p_1 + 1 > 0$, $\beta = \min(q_2, q_3) - q_1 > 0$ et $\gamma = \min(r_2, r_3) - r_1 > 0$, alors, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$Z'(t) \leq 0 \Longrightarrow L'(t) + \lambda L(t) \leq 0,$$

ce qui entraine

$$\frac{u^{\max(p_2,p_3)+\alpha}}{v^{\min(q_2,q_3)+\beta} w^{\min(r_2,r_3)+\gamma}} \geq \frac{u^{p_1-1+\alpha}}{v^{q_1+\beta} w^{r_1+\gamma}} \alpha (\beta + \gamma)^{-1},$$

d'où

$$Z(t) \geq e^{-|\lambda|} \frac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma}} \geq e^{-|\lambda|} \alpha (\beta + \gamma)^{-1} =: C_{10}.$$

Par conséquent, on a $Z(t) \geq C_{10}$ dans $[0, 1]$, donc l'affirmation est prouvée en prenant $C_{11} = e^{|\lambda|} C_{10}$.

Maintenant, supposons (4.1.24). Utilisant la première équation dans (4.1.2) et (4.1.25), nous déduisons

$$u' + \mu_1 u \geq \frac{u^{p_1}}{v^{q_1} w^{r_1}} \geq C_{12} u^{p_1 - q_1 r_1 \frac{\max(p_2,p_3)-p_1+1}{\min(q_2,q_3,r_2,r_3)-\max(q_1,r_1)}} = C_{12} u^{\theta}, \qquad 0 < t \leq 1$$

où

$$C_{12} = C_{11}^{\frac{q_1 r_1}{\min(q_2,q_3,r_2,r_3)-\max(q_1,r_1)}}$$

$$\begin{aligned}
\theta &= p_1 - q_1 r_1 \frac{\max(p_2,p_3) - p_1 + 1}{\min(q_2,q_3,r_2,r_3) - \max(q_1,r_1)} \\
&= 1 + \frac{(p_1-1)\left[\min(q_2,q_3,r_2,r_3) - \max(q_1,r_1) + q_1 r_1\right] - q_1 r_1 \max(p_2,p_3)}{\min(q_2,q_3,r_2,r_3) - \max(q_1,r_1)} > 1.
\end{aligned}$$

En prenant ξ_1 suffisamment grand, on obtient l'explosion de u avant $t = 1$, ce qui contredit avec $T_{max} > 1$. ■

Remarque 4.1.1 *Le modèle biologique de Phyllotaxie (4.1.1) est un cas spécial du système (4.1.2) pour*

$$p_1 = 2, q_1 = 1, r_1 = 1, p_2 = 2, q_2 = 0, r_2 = 0, p_3 = 1, q_3 = 0, r_3 = 0.$$

Il est clair que ces constantes réalisent les conditions (4.1.5) de l'existence globale.

4.2 Existence globale des solutions d'un système de type Gierer-Meinhardt couplé

Selon le modèle d'origine de Gierer-Meinhardt à deux équations (3.3.2), Crystal Cooper [8] a proposé un autre modèle théorique composé de quatre équations de Réaction-Diffusion de type Gierer-Meinhardt couplées avec une modification de Conway-Cooper, où on ajoute le lien de la différence entre la première et la deuxième équation à la troisième comme suit:

$$\begin{aligned}
\partial[u_1]/\partial t &= d_{u_1}\partial^2[u_1]/\partial x^2 - \mu[u_1] + c_0\rho[u_1]^2/[u_2] + \rho_0\rho, \\
\partial[u_2]/\partial t &= d_{u_2}\partial^2[u_2]/\partial x^2 - \nu[u_2] + c'\rho'[u_1]^2, \\
\partial[u_3]/\partial t &= d_{u_3}\partial^2[u_3]/\partial x^2 - \mu[u_3] + c_0\rho[u_3]^2/[u_4] \qquad (4.2.26) \\
&\quad + \rho_0\rho + ky([u_1] - [u_2] + floor), \\
\partial[u_4]/\partial t &= d_{u_4}\partial^2[u_4]/\partial x^2 - \nu[u_4] + c'\rho'[u_3]^2,
\end{aligned}$$

où

$[u_1]$, $[u_2]$, $[u_3]$ et $[u_4]$ représentent les concentrations de quatre substances u_1, u_2, u_3 et

u_4.

ρ et ρ' sont les concentrations de source de u_1, u_2 et u_3, u_4, respectivement.

Le terme ρ_0 est une constante qui représente la production basique de u_1 et u_3.

Le symbole μ représente la destruction ou le déplacement de u_1 et u_3, et ν représente la destruction de u_2 et u_4.

c_0 et c' sont des constantes de production de u_1, u_2 et u_3, u_4, respectivement.

d_{u_1}, d_{u_2}, d_{u_3} et d_{u_4} sont les constantes de diffusion de u_1, u_2, u_3 et u_4, respectivement.

$ky([u_1]-[u_2]+floor)$ représente le lien de la différence entre la première et la deuxième équation où ky et $floor$ sont des constantes contrôlent la taille de cette différence.

Considérons maintenant le système de Réaction-Diffusion de type Gierer-Meinhardt qui généralise le modèle (4.2.26) pour étudier l'existence globale des solutions:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \Delta u_1 - \mu u_1 + b_1 \dfrac{u_1^{p_1}}{u_2^{q_1}} + \sigma, & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a_2 \Delta u_2 - \nu u_2 + b_2 \dfrac{u_1^{r_1}}{u_2^{s_1}}, & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = a_3 \Delta u_3 - \mu u_3 + b_3 \dfrac{u_3^{p_2}}{u_4^{q_2}} + \sigma + a(u_1 - u_2 + b), & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial t} = a_4 \Delta u_4 - \nu u_4 + b_4 \dfrac{u_3^{r_2}}{u_4^{s_2}}, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \tag{4.2.27}$$

avec conditions aux bords de Neumann

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0, \ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0, \ \frac{\partial u_3}{\partial \eta} = 0 \text{ et } \frac{\partial u_4}{\partial \eta} = 0, \qquad x \in \Gamma, t > 0, \tag{4.2.28}$$

et conditions initiales

$$\begin{aligned} u_1(x,0) &= \varphi_1(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u_2(x,0) &= \varphi_2(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u_3(x,0) &= \varphi_3(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u_4(x,0) &= \varphi_4(x) > 0, & x \in \Omega, \end{aligned} \tag{4.2.29}$$

où

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné de frontière Γ régulière.

Les constantes de diffusions: a_1, a_2, a_3 et a_4 sont supposées positives.

μ,ν et σ sont des constantes positives,

p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2, s_1 et s_2: des indices non négatifs avec $p_1 > 1$, $p_2 > 1$.

b_1, b_2, b_3, et b_4 des constantes positives telles que $b_1 \leq b_2$ et $b_3 \leq b_4$.

4.2.1 Etude de l'existence globale

On va démontrer que si:

$$r_1 > p_1 - 1,\ r_2 > p_2 - 1,\ r_1 q_1 > (p_1 - 1)(s_1 + 1) \text{ et } r_2 q_2 > (p_2 - 1)(s_2 + 1), \quad (4.2.30)$$

à l'aide des résultats du chapitre II, le problème (4.2.27)-(4.2.29) admet des solutions globales bornées en tout le temps.

Lemme 4.2.1 *(Idem que Lemme 3.3.1) Soit p, q, r et s des constantes telles que, $r > p - 1$ et $rq > (p-1)(s+1)$. Pour tous h, α, $\beta > 0$, il existe $c = c(h, \alpha, \beta) > 0$ et $\theta = \theta(\alpha) \in (0,1)$, telles que,*

$$\alpha \frac{u^{p-1+\alpha}}{v^{q+\beta}} \leq \beta \frac{u^{r+\alpha}}{v^{s+1+\beta}} + c \left(\frac{u^\alpha}{v^\beta}\right)^\theta, \qquad où \qquad u \geq 0, v \geq h.$$

Théorème 4.2.1 *Soit la fonctionnelle*

$$\omega(t) = \int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} dx + \int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}} dx.$$

associée au système (4.2.27) avec

$$\alpha_1 > 2 \max\left\{1, \frac{\beta_1 \nu}{\mu}\right\}, \alpha_2 > 2 \max\left\{1, \frac{\beta_2 \nu}{\mu}\right\} \quad (4.2.31)$$

$$\frac{1}{\beta_1} > \left(\frac{a_1 + a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}}\right)^2 - 1,\quad \frac{1}{\beta_2} > \left(\frac{a_3 + a_4}{2\sqrt{a_3 a_4}}\right)^2 - 1 \quad (4.2.32)$$

alors pour

$$\frac{p_1 - 1}{r_1} < \min\left(\frac{q_1}{s_1 + 1}, 1\right), \frac{p_2 - 1}{r_2} < \min\left(\frac{q_2}{s_2 + 1}, 1\right), \quad (4.2.33)$$

la fonctionnelle $\omega(t)$ est uniformément bornée dans l'intervalle $[0, T^*]$, $T^* < T_{\max}$ où $T_{\max}\left(\|\varphi_1\|_\infty, \|\varphi_2\|_\infty, \|\varphi_3\|_\infty, \|\varphi_4\|_\infty\right)$ définit le temps éventuel d'explosion.

Corollaire 4.2.1 *Sous les hypothèses du Théorème 4.2.1, la solution du problème (4.2.27)-(4.2.29) est globale et uniformément bornée dans* $\Omega\times\,(0,\infty)$ *pour des conditions initiales positives dans* $C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Preuve de théorème 4.2.1.

$$\omega(t)=\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega+\int\limits_{\Omega}\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega=\omega_1(t)+\omega_2(t),$$

où

$$\omega_1(t)=\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega \text{ et } \omega_2(t)=\int\limits_{\Omega}\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega.$$

Dérivant $\omega(t)$ par rapport à t, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\omega(t)\right)=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)d\Omega+\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)d\Omega=I+J,$$

où

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)d\Omega,\\ J &= \int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)d\Omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)d\Omega=\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_2^{2\beta_1}}\left(\alpha_1u_1^{\alpha_1-1}u_2^{\beta_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)-\beta_1u_1^{\alpha_1}u_2^{\beta_1-1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\right)d\Omega,\\ &= \int\limits_{\Omega}\left(\alpha_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\left(a_1\Delta u_1-\mu u_1+b_1\frac{u_1^{p_1}}{u_2^{q_1}}+\sigma\right)-\beta_1\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\left(a_2\Delta u_2-\nu u_2+b_2\frac{u_1^{r_1}}{u_2^{s_1}}\right)\right)d\Omega,\\ &= \int\limits_{\Omega}\left(\begin{array}{c}\alpha_1a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\Delta u_1-\beta_1a_2\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\Delta u_2+\left(\beta_1\nu-\alpha_1\mu\right)\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}+b_1\alpha_1\frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}}\\ +\alpha_1\sigma\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega-b_2\beta_1\frac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}}\end{array}\right)d\Omega. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green pour les termes en Laplacien, on obtient

$$\int\limits_{\Omega}\alpha_1a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\Delta u_1d\Omega=-\alpha_1a_1\int\limits_{\Omega}\nabla\left(\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\right)\nabla u_1d\Omega+\alpha_1a_1\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}d\Gamma,$$

et comme $\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0$ (condition de Neumann), alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \alpha_1 a_1 \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \Delta u_1 d\Omega &= -\alpha_1 a_1 \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \right) \nabla u_1 d\Omega, \\ &= -\alpha_1 a_1 \int_{\Omega} \frac{1}{u_2^{2\beta_1}} \left((\alpha_1 - 1) u_1^{\alpha_1-2} u_2^{\beta_1} \nabla u_1 - \beta_1 u_1^{\alpha_1-1} u_2^{\beta_1-1} \nabla u_2 \right) \nabla u_1 d\Omega,\end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Omega} \alpha_1 a_1 \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \Delta u_1 d\Omega = \int_{\Omega} \left(-\alpha_1 (\alpha_1 - 1) a_1 \frac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}} |\nabla u_1|^2 + \alpha_1 \beta_1 a_1 \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}} \nabla u_1 \nabla u_2 \right) d\Omega.$$

Pour le terme $\int_{\Omega} \left(\beta_1 a_2 \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}} \Delta u_2 \right) d\Omega$, on trouve

$$\int_{\Omega} \left(\beta_1 a_2 \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}} \Delta u_2 \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(-\alpha_1 \beta_1 a_2 \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}} \nabla u_1 \nabla u_2 + \beta_1 (\beta_1 + 1) a_2 \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}} |\nabla u_2|^2 \right) d\Omega.$$

Alors on obtient

$$I = \int_{\Omega} \begin{pmatrix} -\alpha_1 (\alpha_1 - 1) a_1 \frac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}} |\nabla u_1|^2 + \alpha_1 \beta_1 (a_1 + a_2) \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}} \nabla u_1 \nabla u_2 \\ -\beta_1 (\beta_1 + 1) a_2 \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}} |\nabla u_2|^2 + (\beta_1 \nu - \alpha_1 \mu) \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} \\ +b_1 \alpha_1 \frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}} - b_2 \beta_1 \frac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}} + \alpha_1 \sigma \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \end{pmatrix} d\Omega.$$

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{u_4^{2\beta_2}} \left(\alpha_2 u_3^{\alpha_2-1} u_4^{\beta_2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right) - \beta_2 u_3^{\alpha_2} u_4^{\beta_2-1} \left(\frac{\partial u_4}{\partial t} \right) \right) d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \alpha_2 \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} \left(a_3 \Delta u_3 - \mu u_3 + b_3 \frac{u_3^{p_2}}{u_4^{q_2}} + \sigma + a(u_1 - u_2 + b) \right) \\ -\beta_2 \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+1}} \left(a_4 \Delta u_4 - \nu u_4 + b_4 \frac{u_3^{r_2}}{u_4^{s_2}} \right) \end{pmatrix} d\Omega, \\ &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \alpha_2 a_3 \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} \Delta u_3 - \beta_2 a_4 \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+1}} \Delta u_4 + (\beta_2 \nu - \alpha_2 \mu) \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}} + b_3 \alpha_2 \frac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}} \\ +\alpha_2 \sigma \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} + \alpha_2 a(u_1 - u_2 + b) \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} - b_4 \beta_2 \frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}} \end{pmatrix} d\Omega, \end{aligned}$$

Utilisant la formule de Green pour les termes en Laplacien pour avoir

$$\int_{\Omega}\left(\alpha_2 a_3\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\Delta u_3\right)d\Omega=-\alpha_2 a_3\int_{\Omega}\nabla\left(\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\right)\nabla u_3 d\Omega+\alpha_2 a_3\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u_3}{\partial\eta}\right)\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Gamma,$$

et comme $\dfrac{\partial u_3}{\partial \eta}=0$ (condition de Neumann), alors

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left(\alpha_2 a_3\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\Delta u_3\right)d\Omega &= -\alpha_2 a_3\int_{\Omega}\nabla\left(\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\right)\nabla u_3 d\Omega,\\ &= \int_{\Omega}\left(-\alpha_2\left(\alpha_2-1\right)a_3\frac{u_3^{\alpha_2-2}}{u_4^{\beta_2}}\left|\nabla u_3\right|^2+\alpha_2\beta_2 a_3\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2+1}}\nabla u_3\nabla u_4\right)d\Omega.\end{aligned}$$

Pour le terme $\displaystyle\int_{\Omega}\left(\beta_2 a_4\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+1}}\Delta u_4\right)d\Omega$, on trouve

$$\int_{\Omega}\left(\beta_2 a_4\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+1}}\Delta u_4\right)d\Omega=\int_{\Omega}\left(-\beta_2\alpha_2 a_4\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2+1}}\nabla u_3\nabla u_4+\beta_2\left(\beta_2+1\right)a_4\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+2}}\left|\nabla u_4\right|^2\right)d\Omega,$$

alors J devient

$$J=\int_{\Omega}\left(\begin{array}{c}-\alpha_2\left(\alpha_2-1\right)a_3\dfrac{u_3^{\alpha_2-2}}{u_4^{\beta_2}}\left|\nabla u_3\right|^2+\alpha_2\beta_2\left(a_3+a_4\right)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2+1}}\nabla u_3\nabla u_4\\ -\beta_2\left(\beta_2+1\right)a_4\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+2}}\left|\nabla u_4\right|^2+\left(\beta_2\nu-\alpha_2\mu\right)\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}+b_3\alpha_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}}+\alpha_2\sigma\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\\ +\alpha_2 a(u_1-u_2+b)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}-b_4\beta_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}\end{array}\right)d\Omega.$$

Donc $\dfrac{d}{dt}\left(\omega(t)\right)=I+J$ devient

$$\frac{d}{dt}\left(\omega(t)\right)=\int_{\Omega}\left(\begin{array}{c}-\alpha_1\left(\alpha_1-1\right)a_1\dfrac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}}\left|\nabla u_1\right|^2+\alpha_1\beta_1\left(a_1+a_2\right)\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}}\nabla u_1\nabla u_2\\ -\beta_1\left(\beta_1+1\right)a_2\dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}}\left|\nabla u_2\right|^2-\alpha_2\left(\alpha_2-1\right)a_3\dfrac{u_3^{\alpha_2-2}}{u_4^{\beta_2}}\left|\nabla u_3\right|^2\\ +\alpha_2\beta_2\left(a_3+a_4\right)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2+1}}\nabla u_3\nabla u_4-\beta_2\left(\beta_2+1\right)a_4\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+2}}\left|\nabla u_4\right|^2\\ +\left(\beta_1\nu-\alpha_1\mu\right)\dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}+b_1\alpha_1\dfrac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}}-b_2\beta_1\dfrac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}}+\alpha_1\sigma\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\\ +\left(\beta_2\nu-\alpha_2\mu\right)\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}+b_3\alpha_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}}+\alpha_2\sigma\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\\ +\alpha_2 a(u_1-u_2+b)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}-b_4\beta_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}\end{array}\right)d\Omega$$

$$= I_1 + I_2 + J_1 + J_2$$

avec

$$I_1 = \int_\Omega \begin{pmatrix} -\alpha_1(\alpha_1-1)a_1\dfrac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}}|\nabla u_1|^2 + \alpha_1\beta_1(a_1+a_2)\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}}\nabla u_1 \nabla u_2 \\ -\beta_1(\beta_1+1)a_2\dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}}|\nabla u_2|^2 \end{pmatrix} d\Omega,$$

$$I_2 = \int_\Omega \begin{pmatrix} -\alpha_2(\alpha_2-1)a_3\dfrac{u_3^{\alpha_2-2}}{u_4^{\beta_2}}|\nabla u_3|^2 + \alpha_2\beta_2(a_3+a_4)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2+1}}\nabla u_3 \nabla u_4 \\ -\beta_2(\beta_2+1)a_4\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+2}}|\nabla u_4|^2 \end{pmatrix} d\Omega,$$

$$J_1 = \int_\Omega \left((\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} + b_1\alpha_1\frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}} - b_2\beta_1\frac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}} + \alpha_1\sigma\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \right) d\Omega,$$

$$J_2 = \int_\Omega \begin{pmatrix} (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}} + b_3\alpha_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}} + \alpha_2\sigma\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} \\ +\alpha_2 a(u_1-u_2+b)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} - b_4\beta_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}} \end{pmatrix} d\Omega,$$

où $\dfrac{d}{dt}(\omega_1(t)) = I_1 + J_1$ et $\dfrac{d}{dt}(\omega_2(t)) = I_2 + J_2$.

Estimation de J_1

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_\Omega \left((\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} + b_1\alpha_1\frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}} - b_2\beta_1\frac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}} + \alpha_1\sigma\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \right) d\Omega, \\ &= (\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega + b_1\alpha_1\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}}d\Omega - b_2\beta_1\int_\Omega \frac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}}d\Omega + \alpha_1\sigma\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega. \end{aligned}$$

D'après le principe de maximum il existe c_8 qui dépend de $\|\varphi_1\|_\infty$ et de $\|\varphi_2\|_\infty$ telle que $u_2 \geq c_8 > 0$. On ainsi

$$\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} = \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{u_2}\right)^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \leq \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{c_8}\right)^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}$$

donnant

$$\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \leq c_9 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}, \qquad \text{où} \qquad c_9 = \left(\frac{1}{c_8}\right)^{\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}}, \tag{4.2.34}$$

et en appliquant le Lemme 4.2.1 on obtient

$$\alpha_1 \frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}} \leq \beta_1 \frac{u_1^{\alpha_1+r_1}}{u_2^{\beta_1+s_1+1}} + c\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1},$$

alors

$$\begin{aligned} b_1\alpha_1 \frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}} &\leq b_1\beta_1 \frac{u_1^{\alpha_1+r_1}}{u_2^{\beta_1+s_1+1}} + b_1 c\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1} \\ &\leq b_2\beta_1 \frac{u_1^{\alpha_1+r_1}}{u_2^{\beta_1+s_1+1}} + c_{10}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1} \end{aligned} \tag{4.2.35}$$

où $c_{10} = b_1 c$.

Donc d'après (4.2.34) et (4.2.35), on obtient

$$\begin{aligned} J_1 \quad \leq \quad & (\beta_1\nu - \alpha_1\mu) \int\limits_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} d\Omega + b_2\beta_1 \int\limits_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1+r_1}}{u_2^{\beta_1+s_1+1}} d\Omega + \int\limits_\Omega c_{10}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1} d\Omega \\ & +\alpha_1\sigma \int\limits_\Omega c_9 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} d\Omega - b_2\beta_1 \int\limits_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1+r_1}}{u_2^{\beta_1+s_1+1}} d\Omega, \end{aligned}$$

alors

$$J_1 \leq (\beta_1\nu - \alpha_1\mu) \int\limits_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} d\Omega + \int\limits_\Omega c_{10}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1} d\Omega + \alpha_1\sigma \int\limits_\Omega c_9 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} d\Omega,$$

d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\int\limits_\Omega c_{10}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1} d\Omega \leq \left(\int\limits_\Omega \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right) d\Omega\right)^{\theta_1} \left(\int\limits_\Omega (c_{10})^{\frac{1}{1-\theta}} d\Omega\right)^{1-\theta_1},$$

donc

$$\int\limits_\Omega c_{10}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1} d\Omega \leq c_{11}\left(\omega_1(t)\right)^{\theta_1}, \qquad \text{où } c_{11} = c_{10}\left|\Omega\right|^{1-\theta_1}.$$

On a

$$\int_\Omega c_9 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} d\Omega \leq \left(\int_\Omega \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right) d\Omega\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} \left(\int_\Omega (c_9)^{\alpha_1}\, d\Omega\right)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

alors

$$\int_\Omega c_9 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} d\Omega \leq c_{12}\left(\omega_1(t)\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}, \qquad \text{où } c_{12} = c_9\,|\Omega|^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

il s'ensuit

$$J_1 \leq (\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\,\omega_1(t) + c_{11}\left(\omega_1(t)\right)^{\theta_1} + \alpha_1\sigma c_{12}\left(\omega_1(t)\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}},$$

ce qui donne

$$J_1 \leq (3\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\,\omega_1(t) + c_{13}\left(\left(\omega_1(t)\right)^{\theta_1} + \alpha_1\sigma\left(\omega_1(t)\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}\right).$$

Estimation de J_2

On a

$$\begin{aligned} J_2 &= (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega + b_3\alpha_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}}d\Omega + \alpha_2\sigma\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega \\ &\quad +\alpha_2 a\int_\Omega (u_1 - u_2 + b)\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega - b_4\beta_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}d\Omega, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J_2 &\leq (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega + b_3\alpha_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}}d\Omega + \alpha_2\sigma\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega + \\ &\quad \alpha_2 a\int_\Omega (u_1 + b)\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega - b_4\beta_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}d\Omega, \end{aligned}$$

et comme nous avons montré dans le chapitre précédent que les solutions du système composé de deux premières équations du système (4.2.27), existent globalement et

bornées ($\exists H > 0$, telle que $u_1, u_2 \le H$), donc on peut écrire

$$\begin{aligned} J_2 \quad \le \quad & (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega + b_3\alpha_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}}d\Omega + \alpha_2\sigma\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega + \\ & \alpha_2 a(H+b)\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega - b_4\beta_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}d\Omega. \end{aligned}$$

D'après le principe du maximum il existe c_{14} qui dépend de $\|\varphi_1\|_\infty$, $\|\varphi_2\|_\infty$, $\|\varphi_3\|_\infty$ et de $\|\varphi_4\|_\infty$ telle que $u_4 \ge c_{14} > 0$, donc

$$\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} = \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{u_4}\right)^{\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}} \le \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{c_{14}}\right)^{\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}}$$

d'où

$$\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} \le c_{15}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}, \qquad \text{où } c_{15} = \left(\frac{1}{c_{14}}\right)^{\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}}.$$

D'après le Lemme 4.2.1

$$\alpha_2\frac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}} \le \beta_2\frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}} + c\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2},$$

alors

$$\begin{aligned} b_3\alpha_2\frac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}} \quad & \le \quad b_3\beta_2\frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}} + b_3 c\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2}, \\ & \le \quad b_4\beta_2\frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}} + c_{16}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2}, \end{aligned}$$

où $c_{16} = b_3 c$.

Donc

$$\begin{aligned} J_2 \quad \le \quad & (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega + b_4\beta_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}d\Omega + \int_\Omega c_{16}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2} d\Omega \\ & +\alpha_2\left(\sigma + a(H+b)\right)\int_\Omega c_{15}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}} d\Omega - b_4\beta_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}d\Omega, \end{aligned}$$

conduisons à

$$J_2 \leq (\beta_2\nu - \alpha_2\mu) \int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}} d\Omega + \int_\Omega c_{16} \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2} d\Omega$$
$$+\alpha_2 (\sigma + a(H+b)) \int_\Omega c_{15} \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}} d\Omega.$$

L'inégalité de Hölder entraine

$$\int_\Omega c_{16} \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2} d\Omega \leq \left(\int_\Omega \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right) d\Omega\right)^{\theta_2} \left(\int_\Omega (c_{16})^{\frac{1}{1-\theta_2}} d\Omega\right)^{1-\theta_2},$$

donc

$$\int_\Omega c_{16} \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2} d\Omega \leq c_{17} (\omega_2(t))^{\theta_2}, \qquad \text{où } c_{17} = c_{16} |\Omega|^{1-\theta_2}.$$

On a

$$\int_\Omega c_{15} \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}} d\Omega \leq \left(\int_\Omega \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right) d\Omega\right)^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}} \left(\int_\Omega (c_{15})^{\alpha_2} d\Omega\right)^{\frac{1}{\alpha_2}},$$

alors

$$\int_\Omega c_{15} \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}} d\Omega \leq c_{18} (\omega_2(t))^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}}, \qquad \text{où } c_{18} = c_{15} |\Omega|^{\frac{1}{\alpha_2}}.$$

On obtient

$$J_2 \leq (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\, \omega_2(t) + c_{17} (\omega_2(t))^{\theta_2} + \alpha_2 (\sigma + a(H+b))\, c_{18} (\omega_2(t))^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}},$$

ce qui donne

$$J_2 \leq (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\, \omega_2(t) + c_{19} \left((\omega_2(t))^{\theta_2} + \alpha_2 (\sigma + a(H+b)) (\omega_2(t))^{\frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}} \right).$$

Revenons aux intégrales I_1 et I_2

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_{\Omega} \left(\begin{array}{c} -\alpha_1(\alpha_1-1)a_1 \dfrac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}} |\nabla u_1|^2 + \alpha_1\beta_1(a_1+a_2)\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}}\nabla u_1 \nabla u_2 \\ -\beta_1(\beta_1+1)a_2 \dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}} \ |\nabla u_2|^2 \end{array} \right) dx \\
&= \int\limits_{\Omega} \left(\begin{array}{c} -\alpha_1(\alpha_1-1)a_1 u_2^2 |\nabla u_1|^2 \\ +\alpha_1\beta_1(a_1+a_2)u_1u_2\nabla u_1\nabla u_2 \\ -\beta_1(\beta_1+1)a_2u_1^2|\nabla u_2|^2 \end{array} \right) \frac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1+2}} dx \\
&= -\int\limits_{\Omega} Q_1 \frac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1+2}} d\Omega,
\end{aligned}$$

où

$$Q_1 = \left(\begin{array}{c} \alpha_1(\alpha_1-1)a_1u_2^2|\nabla u_1|^2 \\ -\alpha_1\beta_1(a_1+a_2)u_1u_2\nabla u_1\nabla u_2 \\ +\beta_1(\beta_1+1)a_2u_1^2|\nabla u_2|^2 \end{array} \right),$$

Q_1 est une forme quadratique par rapport à: $u_2|\nabla u_1|$, $u_1|\nabla u_2|$ qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante:

$$Q_1 = \left[\begin{pmatrix} \alpha_1(\alpha_1-1)a_1 & -\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1(a_1+a_2) \\ -\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1(a_1+a_2) & \beta_1(\beta_1+1)a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{pmatrix}.$$

Q_1 est définie positive si, et seulement si, tous les déterminants principaux successifs Δ_1, Δ_2 de sa matrice des coefficients, sont positifs,
où

$$\Delta_1 = \alpha_1(\alpha_1-1)a_1,$$

$\Delta_1 > 0$ d'après (4.2.31).

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} \alpha_1(\alpha_1-1)a_1 & -\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1(a_1+a_2) \\ -\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1(a_1+a_2) & \beta_1(\beta_1+1)a_2 \end{vmatrix} \\
&= \alpha_1^2\beta_1^2a_1a_2 \left(\frac{(\alpha_1-1)}{\alpha_1}\frac{(\beta_1+1)}{\beta_1} - \left(\frac{a_1+a_2}{2\sqrt{a_1a_2}}\right)^2 \right),
\end{aligned}$$

Nous avons $\Delta_2 > 0$ d'après (4.2.32).

Donc

$$\frac{d}{dt}(\omega_1(t)) \leq J_1.$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_\Omega \begin{pmatrix} -\alpha_2(\alpha_2-1)a_3\frac{u_3^{\alpha_2-2}}{u_4^{\beta_2}}|\nabla u_3|^2 + \alpha_2\beta_2(a_3+a_4)\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2+1}}\nabla u_3\nabla u_4 \\ -\beta_2(\beta_2+1)a_4\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+2}}|\nabla u_4|^2 \end{pmatrix} d\Omega, \\
&= \int_\Omega \begin{pmatrix} -\alpha_2(\alpha_2-1)a_3u_4^2|\nabla u_3|^2 \\ +\alpha_2\beta_2(a_3+a_4)u_3u_4\nabla u_3\nabla u_4 \\ -\beta_2(\beta_2+1)a_4u_3^2|\nabla u_4|^2 \end{pmatrix} \frac{u_3^{\alpha_2-2}}{u_4^{\beta_2+2}}dx \\
&= -\int_\Omega Q_2\frac{u_3^{\alpha_2-2}}{u_4^{\beta_2+2}}d\Omega,
\end{aligned}$$

où

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2(\alpha_2-1)a_3u_4^2|\nabla u_3|^2 \\ -\alpha_2\beta_2(a_3+a_4)u_3u_4\nabla u_3\nabla u_4 \\ +\beta_2(\beta_2+1)a_4u_3^2|\nabla u_4|^2 \end{pmatrix},$$

Q_2 est aussi une forme quadratique par rapport à: $u_4|\nabla u_3|$, $u_3|\nabla u_4|$,on a

$$Q_2 = \left[\begin{pmatrix} \alpha_2(\alpha_2-1)a_3 & -\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2(a_3+a_4) \\ -\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2(a_3+a_4) & \beta_2(\beta_2+1)a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla u_3 \\ \nabla u_4\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\nabla u_3 \\ \nabla u_4\end{pmatrix}.$$

Q_2 est définie positive si, et seulement si, tous les déterminants principaux successifs Δ_3, Δ_4 de sa matrice des coefficients, sont positifs,

on a

$$\Delta_3 = \alpha_2(\alpha_2-1)a_3,$$

$\Delta_3 > 0$ d'après (4.2.31).

$$\begin{aligned}
\Delta_4 &= \begin{vmatrix} \alpha_2(\alpha_2-1)a_3 & -\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2(a_3+a_4) \\ -\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2(a_3+a_4) & \beta_2(\beta_2+1)a_4 \end{vmatrix} \\
&= \alpha_2^2\beta_2^2 a_3 a_4 \left(\frac{(\alpha_2-1)}{\alpha_2}\frac{(\beta_2+1)}{\beta_2} - \left(\frac{a_3+a_4}{2\sqrt{a_3a_4}} \right)^2 \right),
\end{aligned}$$

la condition (4.2.32) nous donne la positivité de Δ_4.
Donc

$$\frac{d}{dt}(\omega_2(t)) \leq J_2.$$

Enfin on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\omega(t)) &= \frac{d}{dt}(\omega_1(t)) + \frac{d}{dt}(\omega_2(t)) \\
&\leq J_1 + J_2 \\
&\leq (\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\,\omega_1(t) + c_{13}\left((\omega_1(t))^{\theta_1} + \alpha_1\sigma(\omega_1(t))^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} \right) \\
&+ (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\,\omega_2(t) + c_{19}\left((\omega_2(t))^{\theta_2} + \alpha_2(\sigma + a(H+b))(\omega_2(t))^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}} \right),
\end{aligned}$$

d'après (4.2.31) on aura

$$\omega_1'(t) \leq c_{13}\omega_1^{\theta_1}(t) + c_{13}\alpha_1\sigma(\omega_1(t))^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}. \tag{4.2.36}$$

Par ailleurs, on obtient par (4.2.31) l'inégalité

$$\omega_2'(t) \leq c_{19}\omega_2^{\theta_2}(t) + c_{19}\alpha_2(\sigma + a(H+b))(\omega_2(t))^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}. \tag{4.2.37}$$

Par une intégration simple de (4.2.36) et de (4.2.37) dans $[0, T^*]$ en utilisant le Lemme 4.1.4 on se rend compte que $\omega(t)$ est uniformément bornée; i.e. $\omega(t) \leq \gamma_4$,où γ_4 dépend de $\|\varphi_1\|_\infty$, $\|\varphi_2\|_\infty$, $\|\varphi_3\|_\infty$ et de $\|\varphi_4\|_\infty$. ■

Preuve du Corollaire 4.2.1. En appliquant le Théorème 4.2.1 sur les termes de réaction, qui sont dans $L^\infty((0, T_{\max}), L^m(\Omega))$, pour tout $m > \frac{N(N+1)}{2}$, moyennant

les résultats de Haraux-Kirane [16] et de la Proposition 48.4 de [43], on conclut que la solution du système (4.2.27) est globale et uniformément bornée dans $\Omega \times (0, \infty)$. Voir aussi la preuve du Théorème 3.3.1 pour plus de détails. ■

Remarque 4.2.1 *Si on pose:*

$$\begin{aligned} a_1 &= d_{u_1}, \quad a_2 = d_{u_2}, \quad a_3 = d_{u_3}, \quad a_4 = d_{u_4}, \sigma = \rho_0 \rho, a = ky3, \\ b_1 &= c_0 \rho, \quad b_2 = c' \rho', \quad b_3 = c_0 \rho, \quad b_4 = c' \rho', b = floor, \\ p_1 &= 2, \quad q_1 = 1, \quad r_1 = 2, \quad s_1 = 0, \quad p_2 = 2, \quad q_2 = 1, \quad r_2 = 2, \quad s_2 = 0, \end{aligned}$$

on obtient le système (4.2.26), où ses constantes réalisent les conditions (4.2.30) de l'existence globale des solutions en temps.

Chapitre 5

Etude de l'explosion en temps fini des solutions d'un Système Général de Gierer-Meinhardt à m composantes

Comme nous avons vu dans le Chapitre 4 les solutions de système de Gierer-Meinhardt avec trois composantes explosent en temps fini sous des conditions sur les données initiales de système EDO associé, alors nous allons généraliser l'étude de l'explosion en temps fini pour le système EDO associé au système générale de Réaction-Diffusion de type Gierer-Meinhardt de m équation ou en terme biologique; un modèle composé d'un Activateur et de $(m-1)$ Inhibiteurs avec des concentrations (u_j), $j = 1, ..., m$.

Soit le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \Delta u_1 - b_1 u_1 + \dfrac{u_1^{p_{11}}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{p_{1i}}} + \sigma \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial t} = a_j \Delta u_j - b_j u_j + \dfrac{u_1^{p_{j1}}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{p_{ji}}}, \qquad j = 2, ..., m \end{cases} , x \in \Omega \ , t > 0 \tag{5.0.1}$$

avec les conditions aux bords de Neumann

$$\frac{\partial u_j}{\partial \eta} = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \quad \text{pour } j = 1, ..., m \tag{5.0.2}$$

et les conditions initiales

$$u_j(x,0) = \varphi_j(x) > 0, \quad x \in \Omega, \quad \text{pour tout } j = 1,...,m. \tag{5.0.3}$$

Comme nous avons énoncé précédemment, Ω est un domaine borné de classe $\mathbb{C}^1$ dans $\mathbb{R}^N$, de frontière $\Gamma = \partial\Omega$.

Supposons que $\sigma > 0$. a_j, b_j, p_{ji} des indices non négatifs pour tous: $i,j = 1,...,m$ avec

$$\frac{p_{11}-1}{\max\limits_{j=\overline{2,m}}(p_{j1})} > \min\left[\frac{\prod\limits_{i=2}^{m} p_{1i}}{\min\limits_{j,i=\overline{2,m}}(p_{ji}) - \max\limits_{i=\overline{2,m}}(p_{1i}) + \prod\limits_{i=2}^{m} p_{1i}}, 1\right]. \tag{5.0.4}$$

L'explosion des solutions se réalise s'il existe un temps $T_{\max} < \infty$, tel que les solutions sont bien définies pour tout $0 < t < T_{\max}$, où

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} \sum_{i=1}^{m} \|u_i(t,.)\|_\infty = \infty.$$

Lemme 5.0.2 *Soit* $(u_1(t,.),...,u_m(t,.))$ *la solution de (5.0.1)-(5.0.3). Alors pour tout* (t,x) *dans* $(0,T_{\max}) \times \Omega$, *on a*

$$u_i(t,x) \geq e^{-b_i t}\min(\varphi_i(x)) > 0, \quad i = 1,...,m \tag{5.0.5}$$

Théorème 5.0.2 *Supposons la condition (5.0.4), alors il existe un espace-indépendant des conditions initiales* φ_i, $i = 1,...,m$, *tel que la solution* $(u_1,...,u_m) = (u_1(t),...,u_m(t))$ *du problème (5.0.1)-(5.0.3) explose en temps fini* $T_{\max}$.

Preuve. Considérons l'espace-indépendant des solutions de (5.0.1)-(5.0.3), i.e. les solutions de système EDO associé sans diffusion. Pour des conditions homogènes spatiales $\varphi_i \geq 1$, $i = 1,...,m$, supposons que $T_{max}(\varphi_1,...,\varphi_m) > 1$ (pour obtenir une contradiction). Dans ce qui suit, toutes les constantes positives C_j sont indépendantes de φ_i, $i = 1,...,m$.

Pour $\alpha_i > 0$, $i = 1,...,m$, soit $\lambda = \alpha_1 b_1 - \sum\limits_{i=2}^{m} \alpha_i b_i$ et $L(t) = \dfrac{u_1^{\alpha_1}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{\alpha_i}}$.

On a

$$L'(t) = \alpha_1 \frac{u_1^{\alpha_1 - 1}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{\alpha_i}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) - \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_i^{\alpha_i+1} \prod\limits_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{m} u_j^{\alpha_j}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right),$$

utilisant les équations de (5.0.1) sans diffusion, on obtient

$$L'(t) = \begin{pmatrix} -b_1\alpha_1 \dfrac{u_1^{\alpha_1}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{\alpha i}} + \sum\limits_{i=2}^{m} b_i\alpha_i \dfrac{u_1^{\alpha_1}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{\alpha i}} \\ +\alpha_1 \dfrac{u_1^{p_{11}+\alpha_1-1}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{p_{1i}+\alpha_i}} - \sum\limits_{j=2}^{m} \alpha_j \dfrac{u_1^{p_{j1}+\alpha_1}}{u_j^{\alpha_j+p_{jj}+1} \prod\limits_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{m} u_i^{p_{ji}+\alpha_i}} \\ +\sigma\alpha_1 \dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{\alpha_i}} \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} L'(t)+\lambda L(t) &= \alpha_1 \frac{u_1^{p_{11}+\alpha_1-1}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{p_{1i}+\alpha_i}} - \sum_{j=2}^{m} \alpha_j \frac{u_1^{p_{j1}+\alpha_1}}{u_j^{\alpha_j+p_{jj}+1} \prod\limits_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{m} u_i^{p_{ji}+\alpha_i}} \\ &\quad +\sigma\alpha_1 \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{\alpha_i}} \end{aligned} \tag{5.0.6}$$

Nous envisageons deux cas séparés.

Cas 1:

$p_{11} - 1 > \max\limits_{j=\overline{2,m}} (p_{j1})$.

Appliquant (5.0.6) avec $\alpha_1 = 1$. prenant α_i suffisamment grand, $i = \overline{2,m}$, et utilisant (5.0.5), $\varphi_j(x) \geq 1,\ j = \overline{2,m}$, et l'inégalité de Young on aura pour tout $t \in [0,1]$

$$\frac{\alpha_1}{m} \frac{u_1^{p_{11}}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{p_{1i}+\alpha_i}} = \frac{\alpha_1}{m} \left(\frac{u_1^{p_{j1}+1}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{p_{ji}+1+\alpha_i}} \right)^{p_{11}/p_{j1}+1} \prod_{i=2}^{m} u_i^{h_{ij}} \geq \alpha_j \frac{u_1^{p_{j1}+\alpha_1}}{u_j^{\alpha_j+p_{jj}+1} \prod\limits_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{m} u_i^{p_{ji}+\alpha_i}} - C_j \ ,\ j = \overline{2,m}$$

où

$$\begin{aligned} h_{ij} &= (p_{ji}+1+\alpha_j) \frac{p_{11}}{p_{j1}+1} - q_{1j} - \alpha_j > 0 \ ,\ j = \overline{2,m},\ \ i = \overline{2,m} \\ C_j &= \left(\frac{\alpha_1}{m}\right)^{1-\frac{p_{11}}{p_{11}-(p_{j1}+1)}} \alpha_j^{\frac{p_{11}}{p_{11}-(p_{j1}+1)}} \ ,\ \ j = \overline{2,m}. \end{aligned}$$

D'autre part en utilisant (5.0.5) on aura

$$\frac{\alpha_1}{m} \frac{u_1^{p_{11}}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{p_{1i}+\alpha_i}} = \frac{\alpha_1}{m} \left(\frac{u_1}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{\alpha_i}} \right)^{p_{11}} \prod_{i=2}^{m} u_i^{d_i} \geq C_{m+1} \left(\frac{u_1}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{\alpha_i}} \right)^{p_{11}}$$

où

$$d_i = (p_{11} - 1)\, \alpha_i - p_{1i} > 0 \quad , \quad i = \overline{2, m}.$$

Alors on obtient

$$\alpha_1 \frac{u_1^{p_{11}}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{p_{1i}+\alpha_i}} \geq \sum_{j=2}^{m} \alpha_j \frac{u_1^{p_{j1}+\alpha_1}}{u_j^{\alpha_j+p_{jj}+1} \prod\limits_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{m} u_i^{p_{ji}+\alpha_i}} + C_{m+1} \left(\frac{u_1}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{\alpha_i}} \right)^{p_{11}} - \sum_{j=2}^{m} C_j$$

de (5.0.6), nous avons

$$L'(t) + \lambda L(t) \geq C_{m+1} \left(\frac{u_1}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{\alpha_i}} \right)^{p_{11}} - \sum_{j=2}^{m} C_j$$

ou encore

$$L'(t) + \lambda L(t) \geq C_{m+1} \left(L(t)\right)^{p_{11}} - C$$

où $C = \sum\limits_{j=2}^{m} C_j$.

Pour $L(0)$ suffisamment grand, u_1 explose avant $t = 1$; ce qui contredit la supposition $T_{max}\,(\varphi_1, ..., \varphi_m) > 1$.

Cas 2:

$$p_{11} - 1 < \max_{j=\overline{2,m}} (p_{j1})\,,$$

$$(p_{11} - 1) \left[\min_{j,i=\overline{2,m}} (p_{ji}) - \max_{i=\overline{2,m}} (p_{1i}) + \prod_{i=2}^{m} p_{1i} \right] > \prod_{i=2}^{m} p_{1i} \max_{j=\overline{2,m}} (p_{j1})\,.$$

Affirmons qu'il existe des constantes $C_{m+2}, C_{m+3} > 0$ telles que, si

$$\varphi_1^{\left(\max\limits_{j=\overline{2,m}}(p_{j1})-p_{11}+1\right)} \geq C_{m+2} \prod_{j=2}^{m} \varphi_j^{\left(\min\limits_{i=\overline{2,m}}(p_{ij})-q_{1j}\right)} \tag{5.0.7}$$

alors

$$u_1^{\left(\max\limits_{j=\overline{2,m}}(p_{j1})-p_{11}+1\right)} \geq C_{m+3} \prod_{j=2}^{m} u_j^{\left(\min\limits_{i=\overline{2,m}}(p_{ij})-q_{1j}\right)}, \text{ pour } 0 < t \leq 1. \tag{5.0.8}$$

Pour prouver cette affirmation, prenons $\phi\,(t) = e^{\lambda t} L\,(t)$ et appliquons (5.0.6) avec $\alpha_1 = \max\limits_{j=\overline{2,m}} (p_{j1}) - p_{11} + 1 > 0$,

$\alpha_j = \min\limits_{i=\overline{2,m}} (p_{ij}) - q_{1j}$, $j = \overline{2,m}$.
Alors, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\phi'(t) \leq 0 \Longrightarrow L'(t) + \lambda L(t) \leq 0,$$

donc

$$\frac{u_1^{\max\limits_{j=\overline{2,m}}(p_{j1})+\alpha_1}}{\prod\limits_{j=2}^{m} u_j^{\left(\min\limits_{i=\overline{2,m}}(p_{ij})+\alpha_j\right)}} \geq \frac{u_1^{p_{11}-1+\alpha_1}}{\prod\limits_{j=2}^{m} u_j^{(p_{1j})+\alpha_j}} \alpha_1 \left(\sum_{j=2}^{m} \alpha_j\right)^{-1},$$

et ainsi

$$\phi(t) \geq e^{-|\lambda|} \frac{u_1^{\alpha_1}}{\prod\limits_{j=2}^{m} u_j^{\alpha_j}} \geq e^{-|\lambda|} \alpha_1 \left(\sum_{j=2}^{m} \alpha_j\right)^{-1} =: C_{m+2}.$$

Par conséquent, on a $\phi(t) \geq C_{m+2}$ dans $[0,1]$, et l'affirmation est prouvée en prenant

$$C_{m+3} = e^{|\lambda|} C_{m+2}.$$

Maintenant, supposons (5.0.7). Utilisant la première équation dans (5.0.1) et (5.0.8), on déduit

$$u_1' + b_1 u_1 \geq \frac{u_1^{p_{11}}}{\prod\limits_{j=2}^{m} u_j^{(p_{1j})}} \geq C_{m+4} u_1^{\left(p_{11} - \prod\limits_{j=2}^{m} p_{1j} \frac{\max\limits_{j=\overline{2,m}}\left(p_{j1}\right) - p_{11} + 1}{\min\limits_{j,i=\overline{2,m}}\left(p_{ji}\right) - \max\limits_{j=\overline{2,m}}\left(p_{1j}\right)}\right)} = C_{m+4} u_1^{\theta}, \quad 0 < t \leq 1$$

où

$$C_{m+4} = C_{m+3}^{\left(\frac{\prod\limits_{j=2}^{m} p_{1j}}{\min\limits_{j,i=\overline{2,m}}\left(p_{ji}\right) - \max\limits_{j=\overline{2,m}}\left(p_{1j}\right)}\right)},$$

$$\begin{aligned}
\theta &= p_{11} - \prod_{j=2}^{m} p_{1j} \frac{\max\limits_{j=\overline{2,m}}(p_{j1}) - p_{11} + 1}{\min\limits_{j,i=\overline{2,m}}(p_{ji}) - \max\limits_{j=\overline{2,m}}(p_{1j})} \\
&= 1 + \frac{(p_{11} - 1)\left[\min\limits_{j,i=\overline{2,m}}(p_{ji}) - \max\limits_{j=\overline{2,m}}(p_{1j}) + \prod\limits_{j=2}^{m} p_{1j}\right] - \prod\limits_{j=2}^{m} p_{1j} \max\limits_{j=\overline{2,m}}(p_{j1})}{\min\limits_{j,i=\overline{2,m}}(p_{ji}) - \max\limits_{j=\overline{2,m}}(p_{1j})} > 1.
\end{aligned}$$

En prenant φ_1 suffisamment grand, on obtient l'explosion de u_1 avant $t = 1$; ce qui contredit la supposition $T_{max} > 1$. ■

Conclusion

Dans ce travail nous avons établi l'existence globale des solutions d'un certain système de Réaction-Diffusion de type Gierer-Meinhardt composé de trois équations modélise un phénomène biologique appelé Phyllotaxie;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a_1 \Delta u - \mu_1 u + \dfrac{u^{p_1}}{v^{q_1}(w^{r_1} + \hat{c})} + \sigma, \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = a_2 \Delta v - \mu_2 v + \dfrac{u^{p_2}}{v^{q_2} w^{r_2}}, \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = a_3 \Delta w - \mu_3 w + \dfrac{u^{p_3}}{v^{q_3} w^{r_3}}, \end{cases}$$

sous la condition

$$0 < p_1 - 1 < \max\left\{ p_2 \min\left(\frac{q_1}{q_2+1}, \frac{r_1}{r_2}, 1 \right), p_3 \min\left(\frac{r_1}{r_3+1}, \frac{q_1}{q_3}, 1 \right) \right\}.$$

D'autre part, nous avons démontré l'explosion en temps fini des solutions de son système EDO associé à condition

$$\frac{p_1 - 1}{\max(p_2, p_3)} > \min\left[\frac{q_1 r_1}{\min(q_2, q_3, r_2, r_3) - \max(q_1, r_1) + q_1 r_1}, 1 \right].$$

Ce dernier résultat d'explosion peut être généralisé pour le système de m équations qui est un modèle composé d'un activateur et de $(m-1)$ inhibiteurs;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \Delta u_1 - b_1 u_1 + \dfrac{u_1^{p_{11}}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{p_{1i}}} + \sigma, \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial t} = a_j \Delta u_j - b_j u_j + \dfrac{u_1^{p_{j1}}}{\prod\limits_{i=2}^{m} u_i^{p_{ji}}}, \qquad j = 2, ..., m \end{cases}$$

avec

$$\frac{p_{11} - 1}{\max\limits_{j=2,m}(p_{j1})} > \min\left[\frac{\prod\limits_{i=2}^{m} p_{1i}}{\min\limits_{j,i=2,m}(p_{ji}) - \max\limits_{i=2,m}(p_{1i}) + \prod\limits_{i=2}^{m} p_{1i}}, 1 \right].$$

Bibliographie

[1] S. Abdelmalek, **H. Louafi** and A. Youkana, *Existence of global solutions for a Gierer-Meinhardt system with three equations*, Electronic J. Diff. Equa, 9 (**2012**), 1-8.

[2] N. Alikakos, *L^p-Bounds of Solutions of Reaction-Diffusion Equations.* Communication in. P. D. E. 4 (1979). pp. 827-868.

[3] J.D. Avrin, *Qualitative theory for a model of laminar flames with arbitrary nonnegative initial data.* Journal of Differential Equations. 84 (1990). pp. 290-308.

[4] J.D. Avrin, F. Rothe, *Boundedness and decay estimates for a class of reaction-diffusion systems on $\mathbb{R}^n$.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. 23 (1) (1994) pp. 37-48.

[5] S. Badraoui, *Existence of global solutions for systems of reaction-diffusion equations on unbounded domains.* Electronic J. Diff. Equa. 74 (2002) pp. 01-10.

[6] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[7] T. Cazenave, A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, ellypses 1990

[8] C. Crystale, *Chaotic behavior in coupled Gierer-Meinhardt equations*, Elsevier. J. Computers & Graphics 25 (2001) 159-170.

[9] K-J. Engel, R. Nagel, *A Short Course on Operator Semigroups, (*2006) Springer Science+Business Media, LLC.

[10] W. B. Fitzgibbon, S. Hollis, J. Morgan, *Stability and Lyapunov functions for reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. Vol. 28, No. 3, pp. 595-610, May 1997.

[11] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice Hall Englewood Chiffs. N. J. 1964.

[12] V. A. Galaktionv, J. L Vazquez, *The Problem of Blow-up in Non Linear Parabolic Equations,* Proc. Summer Course on PDEs. Chile (Temuco, 1999), Pitman 2000.

[13] F. R. Gantmacher, Théorie des matrices, tome 1. Paris (1966).

[14] R. Gorenflot, B. de Foucault, *Biologie Végétale: Les Cormophytes*, édition 7, DUNOD, Paris, 2005.

[15] A. Gierer, H. Meinhardt, *A Theory of Biological Pattern Formation*, reprint of Kybernetik 12, 30-39 (1972) (c) by Springer-Verlag 1972.

[16] A. Haraux, M. Kirane, *Estimations* C^1 pour des problèmes paraboliques semi-linéaires. Ann. Fac. Sci. Toulouse 5 (1983), 265-280.

[17] A. Haraux, A. Youkana, *On a Result of K. Masuda Concerning Reaction-Diffusion Equations*. Tôhoku. Math. J. 40 (1988), pp. 159-163.

[18] D. Henry, Geometric *Theory of Semi-linear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, New-York, 1981.

[19] S. L. Hollis, R. H. Martin, M. Pierre, *Global Existence and Boundedness in Reaction Diffusion Systems*. SIAM. J. Math. Anal, Vol. 18, number 3, May 1987.

[20] S. L. Hollis, J. J. Morgan, *On the Blow-up of Solutions to Some Semilinear and Quasilinear Reaction-diffusion Systems*, Rocky Moutain J. Math. vol 14. no 4 (1994), pp. 1447-1465.

[21] S.L. Hollis, J. Morgan, *Interior estimates for a class of reaction-diffusion systems from* L^1 *a priori estimates*, JDE, vol 92, no. 2 (1992), 260-276.

[22] S. L. Hollis, J. J. Morgan, *Partly dissipative reaction-diffusion systems and a model of phosphorus diffusion in silicon*, Nonlinear Anal. T. M. A., 19 (1992), pp. 427-440.

[23] I. Kanel, M. Kirane, *Global existence and large time behavior of positive solutions to a reaction diffusion system*, Differential Integral Equations. 13 (2000), pp. 255-264.

[24] I. Kanel, M. Kirane, *Global solutions of reaction-diffusion systems with a balance law and nonlinearities of exponential growth.* Journal of Differential Equations. 165 (2000), pp. 24-41.

[25] M. Kirane, *Global bounds and asymptotics for a system of reaction-diffusion equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 138 (1989), pp. 328-342.

[26] S. Kouachi, *Existence globale et explosion des solutions des certains systèmes d'équations aux dérivées partielles*, thèse de doctorat d'état, 1999.

[27] S. Kouachi, *Existence of global solutions to reaction-diffusion systems via a Lyapunov functional.* Electron J. Diff. Equa, Vol. 2001(2001), No. 68, pp. 1-10.

[28] S. Kouachi, A. Youkana, *Global existence for a class of reaction-diffusion systems.* Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Vol. 49, Number 3, (2001).

[29] **H. Louafi**, *Blow up Solutions for a general Gierer-Meinhardt System with m components.* Global Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 11, Number 6 (**2015**), pp. 5195-5201.

[30] **H. Louafi**, *Blow up Solutions for a Gierer-Meinhardt System with Three Equations.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 8, (**2014**), no. 157, pp. 7797 - 7801.

[31] H. Meinhardt, *A Model for Pattern Formation on the Shells of Molluscs*, J. theor. Biol. (1987) 126, 63-89.

[32] H. Meinhardt, *Models of Biological Pattern Formation*, Academic Press, London (1982).

[33] H. Meinhardt, A. Koch, G. Bernasconi, Models of pattern formation applied to plant development, réimpression d'un chapitre de: Symmetry in Plants (D. Barabe et R. V. Jean, Eds), World Scientific Publishing, Singapore; pp. 723-758.

[34] R. H. Martin, M. Pierre, *Nonlinear reaction-diffusion systems*, Nonlinear equations in the applied sciences, Math. Sci. Eng., 185, Academic Press, Boston, MA, pp. 363-398, 1992.

[35] L. Mingde, C. Shaohua, Q. Yuchun, *Boundedness and Blow Up for the general Activator-Inhibitor Model*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, vol.11 No.1. Jan., 1995

[36] K. Masuda, K. Takahashi, Reaction-Difusion systems in the Gierer-Meinhardt theory of biological pattern formation, Japan J. Appl. Math, 1987, 4(1), 47-58.

[37] K. Masuda, *On the Global Existence and Asymptotic Behavior of Solutions of Reaction-Diffusion Equations*, Hokkaido. Math. J. 12 (1983), pp. 360-370.

[38] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric, A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis.* Mathematics and Its Applications, (1993) Kluwer Academic Publishers.

[39] J. J. Morgan, *Global Existence for Semilinear Parabolic Systems*, SIAM J. Math. Anal. 20, 1128-1144 (1989)..

[40] C.V. Pao, *On Nonlinear Diffusion Systems.* J. Math.Analysis. App. 87. (1982) 165-198.

[41] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Math. Sciences 44, Springer-Verlag, New York (1983).

[42] M. Pierre, D. Schmitt, *Blow-up in reaction-diffusion systems with dissipation of mass.* SIAM J. Math. Anal. 28 (1997), no. 2, 259–269.

[43] P. Quittner, Ph. Souplet, *Superlinear Parabolic Problems, Blow-up, Global Existence and Steady States.* Birkhäuser Verlag AG (2007).

[44] F. Rothe, *Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems*, Lecture Notes in Math. 1072, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[45] J. Ryan, G*lobal existence* of *reaction-diffusion equations over multiple domains*, Thesis Texas A&M University (2004).

[46] J. Smoller, *Shock Waves et Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York (1983)

[47] M. R. Spiegel, *Théorie et Applications de L'analyse,* Serie Schaum, (1982).

[48] A. M. Turing, *The Chemical Basis of Morphogenesis,* Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, Vol. 237, No. 641. (Aug. 14, 1952), pp. 37-72.

[49] W. Jianhua, L. Yanling, Global Classical Solution for the Activator-Inhibitor Model. Acta Mathematicae Applicatae Sinicae (chine), 1990, 13, 501-505